

♣ Baccalauréat C Lille juin 1983 ♣

EXERCICE 1

3 POINTS

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.
On donne les points $A(1; 1)$ et $B(-1; 0)$.

1. Soit f la similitude inverse de centre A , d'axe (OA) et de rapport 2. Exprimer l'affixe z' de $M' = f(M)$ à l'aide de l'affixe z de M .
2. Faire de même avec la similitude directe g de centre B , d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $g \circ f$.

EXERCICE 2

3 POINTS

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{Z}^2 chacune des équations suivantes :
 - a. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2; \quad 17\alpha - 19\beta = 2;$
 - b. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2; \quad 17\alpha - 19\beta = -2;$
2. a. Trouver tous les entiers relatifs n vérifiant simultanément

$$\begin{cases} n \equiv 0 & [17], \\ n \equiv -2 & [19]. \end{cases}$$

- b. Résoudre, de même, le système

$$\begin{cases} n \equiv -2 & [17], \\ n \equiv 0 & [19]. \end{cases}$$

3. Déduire de ce qui précède l'ensemble des entiers relatifs n tels que

$$n^2 + 2n \equiv 0 \quad [323].$$

EXERCICE 2

14 POINTS

(Les trois parties du texte sont dans une large mesure indépendantes)
Pour tout entier naturel n , on définit la fonction numérique f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On note C_n la courbe représentant f_n dans un plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm), et on désigne par I_n l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

Partie 1

1. Étudier les variations de f_1 et tracer la courbe C_1 .
2. Soit φ l'application du plan E dans lui-même qui au point M de coordonnées $(x; y)$, associe le point M' de coordonnées $x' = x$ et $y' = x - y$.
Montrer que φ est une symétrie, dont on précisera l'axe et la direction.
Vérifier que la courbe C_3 est l'image de C_1 par φ . Tracer alors C_3 dans le même repère que C_1 .
3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3 .
4. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par les courbes C_1 et C_3 et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Partie 2

Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que u est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $u'(x)$.
2. On pose, pour tout x de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = u(\tan x)$.
 - a. Préciser $F(0)$.
 - b. Montrer que F est dérivable et calculer $F'(x)$, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
 - c. En déduire que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = x$.
 - d. Déduire de l'égalité précédente la valeur de $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel p ,

$$I_{2p+1} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}.$$

Calculer alors I_2 , I_4 et I_6 .

- b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1}$.
En déduire la limite de I_{2p} quand p tend vers $+\infty$.
4. On définit la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall p \geq 1, \quad v_p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p+1}.$$

Montrer que $\forall p \geq 1, \quad v_p = I_0 + (-1)^{p-1} I_{2p}$.

Quelle est la limite de v_p quand p tend vers $+\infty$?

Partie 3

On considère, dans un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3, un mobile M dont les coordonnées sont, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad z = \frac{t^2}{1+t^2}$$

t désignant le temps et décrivant l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Montrer que le point M appartient à un plan P dont on donnera une équation.
2. Vérifier que le point O' de coordonnées $(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$ et les vecteurs $\vec{u} = \vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ constituent un repère orthonormé de P .
Trouver un vecteur \vec{w} tel que $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit un repère orthonormé de \mathcal{E} .
3. Exprimer, en fonction de t , les coordonnées X, Y et Z du point mobile M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
En déduire que le point M appartient à la courbe Γ du plan d'équation $4X^2 + 2Y^2 = 1$.
Tracer cette courbe dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Préciser la trajectoire de M et le sens de parcours sur sa trajectoire