

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

On considère, dans l'espace rapporté à un trièdre $Oxyz$, les points variables A, B, C de coordonnées respectives

$$A : (a ; 0 ; 0), B : (0 ; b ; 0), C : (0 ; 0 ; c),$$

affectés chacun des coefficients suivants :

pour A : $(b + c)$, pour B : $(c + a)$, pour C : $(a + b)$.

Les nombres réels variables a, b, c sont tels que

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0 \quad \text{et} \quad ab + bc + ca = 0.$$

1. Montrer que ces trois points ont un barycentre, G, et calculer les coordonnées, x, y et z , de celui-ci en fonction de a, b, c .
2. Calculer $x + y + z$ et en déduire l'ensemble des points G.

EXERCICE 2

Soit, dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$, les points fixes

$$A : (x = 2 ; y = 0), \quad B : (x = 0 ; y = 1),$$

puis les points variables

$$\begin{aligned} M : \quad x &= 2(1 + r \cos t), & y &= 2r \sin t, \\ N : \quad x &= r \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), & y &= 1 + r \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

où r et t sont des variables réelles, $r \neq 0$.

1. Comparer les modules des vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BN} ; trouver l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN})$ et en déduire la nature de la transformation qui fait correspondre au vecteur \overrightarrow{AM} le vecteur \overrightarrow{BN} .
2. Préciser le point double de cette transformation.

PROBLÈME

Partie A

Soit un polygone régulier convexe de 7 côtés, ABCDEFG, inscrit dans un cercle de centre O, dont le rayon est pris comme unité de longueur.

1. On effectue la rotation de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{7}$.

Que peut-on dire de la transformée de la figure? En déduire que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} = \vec{0},$$

puis, en projetant sur un axe portant l'un des vecteurs (\overrightarrow{OA} par exemple), que

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

2. Poser $x = \cos \frac{2\pi}{7}$ et prouver qu'il est l'une des racines de l'équation

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

sur l'intervalle $(0; +1)$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule sur l'intervalle $(0; +1)$.
3. En déduire que $0,62 < \cos \frac{2\pi}{7} < 0,63$.

Partie C

1. Soit $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ les racines réelles ou complexes de l'équation

$$z^7 - 1 = 0.$$

- a. Les représenter géométriquement.
- b. Calculer leur somme et leur produit.
- c. p étant un entier naturel non nul, calculer

$$S_p = z_1^p + z_2^p + z_3^p + z_4^p + z_5^p + z_6^p + z_7^p$$

dans les deux cas suivants :

p est multiple de 7;

p n'est pas multiple de 7.

On commencera par calculer la somme S_p pour

$$p = 1, \quad p = 2 \quad \text{et} \quad p = 3;$$

on en déduira la valeur de S_p si p n'est pas multiple de 7.

2. Écrire le polynôme $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ sous la forme d'un produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels, certains d'entre eux faisant intervenir des lignes trigonométriques de

$$\frac{2\pi}{7}, \quad \frac{4\pi}{7}, \quad \text{et} \quad \frac{6\pi}{7}.$$