Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Lille septembre 1971 ∾

Exercice 1

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système d'équations .

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{i}x - y & = & 1-\mathrm{i},\\ -x+\mathrm{i}y & = & -1.\end{array}\right.$$

Déterminer les rotations d'angles $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ transformant le point M d'affixe x en le point P d'affixe y.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on envisage les cercles (C) de centre ω, de rayon R et (C') de centre ω', de rayon R'. Les coordonnées de ω sont $x = -2,~y = 2$, celles de ω' sont $x = 4,~y = 5$. On a de plus $R = 1$ et $R' = 4$.

1. Construire les cercles (C) et (C') et écrire leurs équations.
2. Vérifier que le point H de coordonnées $x = 0$ et $y = 3$ a même puissance par rapport aux deux cercles (C) et (C'). Donner l'équation de l'axe radical des deux cercles.
3. Montrer que le faisceau déterminé par les deux cercles (C) et (C') est un faisceau à points limites I et J. Calculer les coordonnées des points I et J.

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On désigne par (P) l'ensemble des points du plan n'appartenant pas aux axes. On considère dans (P) la correspondance T_λ qui, au point M, de coordonnées x et y, associe le point M', de coordonnées x' et y', telles que

$$x' = \frac{\lambda}{y} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\lambda}{x},$$

λ étant un nombre non nul.

Partie A

1. Montrer que T_λ est une bijection involutive de (P) sur (P).
2. Quelle est, suivant le signe de λ, l'image par T_λ de chacune des quatre régions déterminées dans (P) par les axes de coordonnées ?
3. Quel est l'ensemble (E) des points de (P) invariants par T_λ ?
4. Montrer que O, M et M' sont alignés. Dans le cas où la droite $(\text{O}MM')$ coupe (E) en deux points A et B, calculer le birapport (M, M', A, B) des quatre points M, M', A et B.

Partie B

Tout nombre réel non nul, λ, détermine une bijection T_λ. De même tout nombre réel, k, non nul, détermine une homothétie de centre O et de rapport k : $\mathcal{H}_k$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble dont les éléments sont les bijections T_λ et les homothéties $\mathcal{H}_k$ [toutes définies sur (P)].

1. Démontrer que la composition des applications (notée $\circ$) est une loi interne dans $\mathcal{F}$.
2. Montrer qu'il existe un élément e de $\mathcal{F}$ tel que, pour tout élément f de $\mathcal{F}$,

$$e \circ f = f \circ e = f.$$

3. Montrer qu'à tout élément f de $\mathcal{F}$, on peut associer un élément f^{-1} de $\mathcal{F}$, tel que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

4. Montrer que la loi de composition des applications confère à $\mathcal{F}$ une structure de groupe non commutatif.

Partie C

Soit (C) la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^x$.

1. Construire la courbe (C) dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ précédent. On appellera A le point d'abscisse 0 sur (C).
2. On note T_1 la transformation T_λ pour $\lambda = 1$.
   Quelle est l'équation $y = g(x)$ de la courbe $\left(C'\right)$ image de la courbe (C) privée du point A, par la transformation T_1 ?
3. Construire la courbe $\left(C'\right)$. Étudier la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.
4. Quelle est l'image par T_1 de l'ensemble des points de (C) d'abscisse positive ; d'abscisse négative ?