Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Lille septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

Une urne contient 4 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher (la possibilité de tirer une boule est donc la même pour chaque boule).

1. Une épreuve consiste à tirer simultanément 5 boules de l'urne, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à toute épreuve le nombre de boules blanches obtenues parmi les 5. Définir la loi de probabilité-image, l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.
2. Répondre aux mêmes questions avec un tirage de 5 boules s'effectuant *avec remise* : c'est-à-dire, qu'après avoir tiré la première boule, on en note la couleur et on la remet dans l'urne avant de tirer la deuxième boule, et ainsi de suite jusqu'à la cinquième.

EXERCICE 2

Soit la fonction f de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}}{x}$$

1. Déterminer les restrictions de la fonction dérivée f' aux intervalles $]0\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.
   f est-elle dérivable en 1 ?
   Quel est le signe de f' ? (On peut poser si nécessaire $u = \sqrt{x^2 - 1}$).
2. x étant supérieur à 1, mettre $f(x)$ sous la forme

   $$f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \epsilon(x)$$

   où la fonction ϵ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de f.
3. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

PROBLÈME

Partie A

Soit un espace vectoriel euclidien V_2 dont une base orthonormée est $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Un endomorphisme φ de V_2 (c'est-à-dire une application linéaire de V_2 dans lui-même) est défini par sa matrice $m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que φ est une bijection de V_2 dans V_2. Déterminer φ^{-1} par sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$; φ est-elle involutive ?

2. Montrer qu'il existe deux droites vectorielles d_1 et d_2 globalement invariantes par φ.

3. Montrer que φ est la composée, dans un ordre arbitraire, d'une homothétie vectorielle de rapport positif et d'une symétrie vectorielle orthogonale.

4. Calculer m^2, m^3, m^4. En déduire m^n pour tout n entier naturel non nul.

Partie B

Soit un plan affine euclidien P, de direction V_2 ; à partir d'un point O de P on introduit le repère d'axes Ox et Oy, dont $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ sont respectivement des vecteurs directeurs. On considère l'application affine f de P dans P définie par φ et par le point I, tel que $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\imath}$, invariant par f.

1. f est-elle une bijection de P dans P ? Si oui déterminer f^{-1}.
Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $f(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M.

2. f a-t-elle d'autres points invariants que I ? Déterminer les droites telles que chacune ait même direction que sa transformée par f. Préciser les droites globalement invariantes.

3. Montrer que f est la composée, dans un ordre arbitraire, d'une homothétie de rapport positif et d'une symétrie axiale.

4. On pose $f^n = f \circ f^{n-1}$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Déterminer f^2, puis f^n (n entier naturel non nu!).

b. M étant fixé dans P, construire $M_1 = f(M)$, $M_2 = f^2(M)$, $M_3 = f^3(M)$, et démontrer que l'ensemble des points $M_n = f^n(M)$ est inclus dans la réunion de deux droites. Ces droites sont-elles distinctes quel que soit M ?

c. G étant le centre de gravité du triangle IOf(O), déterminer les coordonnées de $\mathrm{G}_2 = f^2(\mathrm{G})$ sans calculer les coordonnées de G.