

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Lille septembre 1985 ⌘

EXERCICE 1

4 points

On considère les deux suites de nombres réels, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2} \\ v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite v converge vers $\frac{1}{2}$.
2. a. Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de variable réelle :

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x - \sin x \\ x &\longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \\ x &\longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \end{aligned}$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

- b. Justifier que pour tout $n \geq 1$,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4.$$

Déduire du a. l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n.$$

pour tout entier naturel n non nul.

- c. Démontrer que la suite u est convergente; quelle est sa limite?

EXERCICE 2

4 points

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$x \longmapsto f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère ortho-normé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit F la restriction de f à \mathbb{R}_+ .

Montrer que F est une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle que l'on précisera.

Soit G la bijection réciproque de F .

Montrer que pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$,

$$G(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

3. Sur quel intervalle G est-elle dérivable? Préciser $G'(x)$.

$$\text{En déduire } I = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

PROBLÈME**4 points**

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés géométriques relatives à une parabole.

Partie A

Le plan affine étant supposé orienté, les notations (D, D') et (\vec{u}, \vec{v}) désigneront l'une des mesures des angles orientés du couple de droites (D, D') et du couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) .

Soit ABC un triangle non rectangle inscrit dans un cercle \mathcal{C} de centre O , et soit H son orthocentre. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les cercles de centres O_1 et O_2 , symétriques du cercle \mathcal{C} , respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC) .

1. Soit α le symétrique de H par rapport à la droite (AB) .

Justifier que $(\alpha A, \alpha C) = -(HA, \alpha C) \quad [\pi]$.

Montrer que $(\alpha A, \alpha C) = (BA, BC) \quad [\pi]$.

Que peut-on en déduire pour α , puis pour H ?

Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$?

2. Montrer que \mathcal{C}_2 est l'image de \mathcal{C}_1 par une rotation R de centre A dont vous préciserez une mesure de l'angle.

3. Soit M un point quelconque du cercle \mathcal{C} , dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AC) et (AB) sont B' et C' . Justifier les égalités suivantes :

$$R(C') = B'; \quad (HB', HA) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_1A}) \quad [\pi];$$

$$(HC', HA) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A}) \quad [\pi]$$

$$(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A}) = (\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A}) \quad [2\pi]$$

En déduire que $(HB', HC') = 0 \quad [\pi]$. Que peut-on déduire pour les points H, B', C' puis pour les points H, A', B', C' où A' est le symétrique de M par rapport à la droite (BC) ?

4. Montrer que les points I, J, K milieux respectifs des segments $[MN], [MB'], [MC']$ sont alignés.

5. Réciproquement, soit M un point quelconque du plan dont les projections orthogonales K, J, I sur les droites $(AB), (AC), (BC)$ sont alignés. Démontrer que M appartient au cercle \mathcal{C} . (On pourra montrer que les points M, I, J, C d'une part et M, I, K, B d'autre part sont cocycliques).

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(Oy) désigne l'axe des ordonnées.

Soit \mathcal{P} la conique d'équation $y^2 = 4x$; un point de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $y^2 > 4x$ est dit extérieur à \mathcal{P} ; il sera admis que par un tel point, passent deux tangentes à la conique \mathcal{P} .

1. Préciser la nature de \mathcal{P} ainsi que ses éléments caractéristiques : foyer F, sommet S, directrice D, axe, tangente au sommet. Construire \mathcal{P} ainsi que ses éléments caractéristiques.
2. Soit M un point de \mathcal{P} de projeté orthogonal M' sur D.
Soit Δ la tangente à \mathcal{P} au point M. Soient T un point de Δ et U le milieu du segment $[M'F]$.
En rappelant les résultats du cours, que peut-on dire des distances MM' et MF ? du triangle $MM'F$? de la droite Δ pour ce triangle? du triangle TFM' ? Démontrer que U appartient à l'axe (Oy) .
3. Soit A un point extérieur à \mathcal{P} . En utilisant les remarques précédentes, indiquer une construction à la règle et au compas des deux tangentes à \mathcal{P} issues de A.
4. Montrer qu'une droite Δ' , telle que la projection orthogonale de F sur Δ' appartienne à l'axe (Oy) est tangente à \mathcal{P} .
5. a. Soit un triangle ABC non rectangle et extérieur à \mathcal{P} , tel que ses trois côtés soient tangents à \mathcal{P} .
Démontrer que A, B, C, F sont cocycliques (on pourra utiliser la partie A).
Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à D.
b. Indiquer la construction du triangle ABC, connaissant les projections orthogonales I, J, K de F sur les côtés (BC), (AC), (AB) (ces trois points étant donnés sur l'axe (Oy)).

Les questions 1, 2, 3, 4 de la partie B sont indépendantes de la partie A.