

## Baccalauréat C Lille septembre 1977

### EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan affine euclidien  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , et assimilé au plan complexe. Soit  $P^*$  le plan  $P$  privé du point  $O$ .

On considère l'application  $f$  de  $P^*$  vers lui-même, qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  par la relation

$$z' \cdot \bar{z} = a^2,$$

$a$  étant un réel donné non nul, et  $\bar{z}$  le conjugué de  $z$ .

1. Démontrer que l'application  $f$  est involutive.  
Quel est l'ensemble des points invariants?
2. Démontrer que les points  $O, M, M'$  sont alignés et que  $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = a^2$ .
3. Quelles sont les images
  - a. des droites passant par  $O$ ?
  - b. des cercles de centre  $O$ ?
  - c. de la droite d'équation  $x = |a|$ ?

### EXERCICE 2

3 POINTS

Pour tout entier naturel  $n$  on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx.$$

1. Calculer  $I_0$ .
2. Par une intégration par parties, calculer  $I_1$ .
3. Montrer que, pour tout entier non nul  $n$ , on a la relation de récurrence :

$$(3 + 2n)I_n = 2nI_{n-1}.$$

### PROBLÈME

13 POINTS

On rappelle que l'ensemble  $M$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et que ce même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire.

#### Partie A

Soit  $E$  l'ensemble des matrices de la forme  $a.M + b.I$  où

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $a$  et  $b$  sont des nombres réels arbitraires.

1. Démontrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M$  et que sa dimension est 2.
2. Prouver que  $M^2 + M - 6.I = 0$  où  $0$  désigne la matrice nulle.  
En déduire que la multiplication des matrices est une loi interne dans  $E$ , et que l'addition et la multiplication des matrices munissent  $E$  d'une structure d'anneau commutatif et unitaire.
3. a. Résoudre dans  $E$  l'équation

$$X^2 = X.$$

On trouve quatre solutions : la matrice nulle  $0$ , la matrice unité  $I$  et deux autres  $A$  et  $B$ , que l'on exprimera en fonction de  $M$  et de  $I$ .

- b. Démontrer que  $A \cdot B = B \cdot A = 0$ .
  - c. Démontrer que  $(A; B)$  est une base de  $E$ .
4. Résoudre dans  $E$  l'équation

$$Y^2 = 1.$$

On trouve ainsi quatre solutions :  $I$ ,  $-I$  et deux autres  $S$  et  $-S$  que l'on exprimera en fonction de  $M$  et de  $I$ .

### Partie B

Soit  $\pi$  un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On désigne par  $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_S, \Phi_{-S}$  les endomorphismes de  $\pi$ , de matrices respectives  $A, B, S$  et  $-S$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

1. Quelle est la nature géométrique de  $\Phi_A$  et  $\Phi_B$ ? Démontrer que :

$$\text{Image de } \Phi_A = \text{Noyau de } \Phi_B$$

$$\text{et Image de } \Phi_B = \text{Noyau de } \Phi_A$$

Expliquer alors pourquoi le produit  $A \cdot B$  est nul.

2. Déduire de A 4. que  $\Phi_S$  et  $\Phi_{-S}$  sont involutives. Reconnaitre les endomorphismes  $\Phi_S$  et  $\Phi_{-S}$  et préciser leurs éléments caractéristiques.

### Partie C

Soit  $P$  le plan affine euclidien associé à  $\pi$ , et rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Écrire les équations analytiques des applications affines associées à  $\Phi_S$  et  $\Phi_{-S}$  et laissant le point  $O$  invariant. On les appelle  $f_S$  et  $f_{-S}$ . Les reconnaître.
2. Étudier, et représenter graphiquement dans le plan  $P$ , les variations de la fonction

$$g: x \longmapsto g(x) = \frac{1}{14} \left[ -9x + 5\sqrt{x^2 + 1} \right].$$

Soit  $(C)$  la courbe représentative. Montrer qu'elle admet pour asymptotes les droites d'équation  $x + y = 0$  et  $2x + 7y = 0$ .

3. Soit la fonction

$$h: x \mapsto h(x) = \frac{1}{14} \left[ -9x - 5\sqrt{x^2 + 1} \right].$$

et  $(C')$  sa courbe représentative.

En remarquant que  $h(-x) = -g(x)$ , dites quelle est la transformation qui permet de passer de  $(C)$  à  $(C')$ . Construire alors  $(C')$ .

Montrer que l'équation de la courbe  $(\Gamma) = (C) \cup (C')$  peut s'écrire :

$$28(2x + 7y)(x + y) - 25 = 0.$$

4. Prendre le nouveau repère suivant  $(O, \vec{i}', \vec{j}')$

$$\begin{cases} \vec{i}' &= \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{j}' &= 7\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$$

Trouver l'équation de  $(\Gamma)$  dans ce repère et en déduire sa nature géométrique.

5. On transforme la courbe  $(\Gamma)$  par  $f_s$  et  $f_{-s}$ .

Montrer que  $f_s(\Gamma) = f_{-s}(\Gamma)$ .

Soit  $(\Gamma')$  la courbe obtenue. Quelle est son équation dans le repère  $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ . La reconnaître et la construire.