

Baccalauréat C septembre 1981 Lille

EXERCICE 1

1. Déterminer dans \mathbb{N} , l'ensemble des diviseurs de 30.
2. Trouver les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur Δ et le plus petit commun multiple M vérifient

$$3M - 2\Delta = 30.$$

EXERCICE 2

Soit P un plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On rappelle qu'à tout point M du plan de coordonnées $(x ; y)$ on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe du point M .

Soit A, B, C, D , quatre points du plan d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 .

1. Montrer que le quadrilatère (A, B, C, D) est un carré si, et seulement si, les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 vérifient les relations

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = z_3 - z_4 \\ z_3 - z_1 = \pm i(z_4 - z_2). \end{cases}$$

2. Montrer qu'alors l'affixe z_0 du point I intersection de AC et BD vérifie

$$(z_1 - z_0)^4 = (z_2 - z_0)^4 = (z_3 - z_0)^4 = (z_4 - z_0)^4.$$

3. Construire le carré dans le cas où $z_0 = 1 + i$ et $z_1 + z_2 = 0$.

Déterminer les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 dans ce cas.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désignera l'intervalle $] -1 ; +1[$. On rappelle que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 est un anneau pour l'addition et la multiplication.

Partie A

À tout réel x de E , on associe, par l'application M , la matrice

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

On désignera par \mathcal{M} l'ensemble des matrices $M(x)$ quand x appartient à E .

1. Démontrer que M est une bijection de E sur \mathcal{M} .

2. Démontrer que

$$\forall x, x' \in E; \forall x', x' \in E, \frac{x+x'}{1+xx'} \in E \text{ et } M(x) \times M(x') = M\left(\frac{x+x'}{1+xx'}\right)$$

puis que \mathcal{M} , muni de la multiplication des matrices, est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre de l'inverse de $M(x)$.

3. On définit sur E la loi \star par

$$\forall x, x' \in E; \forall x', x' \in E: x \star x' = \frac{x+x'}{1+xx'}$$

4. Dans cette question, \mathcal{P} désigne un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) . On désigne par p_1 et p_2 les endomorphismes de \mathcal{P} de matrices respectives

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Calculer les matrices dans la base (\vec{i}, \vec{j}) des endomorphismes $p_1 \circ p_1, p_2 \circ p_2, p_2 \circ p_1, p_1 \circ p_2$. En déduire que p_1 et p_2 sont deux projections vectorielles que l'on caractérisera géométriquement.

5. Démontrer qu'il existe un réel λ strictement positif que l'on exprimera en fonction de x tel que $M(x) = \lambda M_1 + \frac{1}{\lambda} M_2$. (où x est élément de E).

6. On pose $[M(x)]^1 = M(x)$ et

$$\forall n, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad [M(x)]^n = M(x) \times [M(x)]^{n-1}.$$

En utilisant les résultats des questions 4. et 5. calculer $[M(x)]^n$ si n est un entier naturel non nul.

Partie B

Soit f la fonction définie sur E par

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

où \ln désigne la fonction logarithmique népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative et dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan affine euclidien P.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire du domaine, ensemble des points $M(x; y)$ tels que $0 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$, où $\alpha \in]0; 1[$.

Cette aire admet-elle une limite quand α tend vers 1 par valeurs inférieures?

3. Établir que f est une bijection de E sur \mathbb{R} . On pose, si $x \in E$, $y = f(x)$. Exprimer $x = f^{-1}(y)$ en fonction de y .
4. Démontrer que

$$\forall x, x' \in E; \forall x'', x'' \in E: f(x \star x') = f(x) + f(x')$$

c'est-à-dire que f est un isomorphisme du groupe E muni de la loi \star (définie au A 3) sur le groupe \mathbb{R} muni de l'addition.

5. On définit l'application de \mathbb{R} dans \mathcal{M} par $N = M \circ f^{-1}$ c'est-à-dire que si $y = f(x)$, $N(y) = M(x)$. En utilisant le B 3. montrer que

$$\forall y, y \in \mathbb{R}, \quad N(y) = e^y M_1 + e^{-y} M_2$$

où M_1 et M_2 sont les matrices introduites au A 4.

Ceci ne pouvait-il pas être obtenu en utilisant un résultat du A?

6. Démontrer que

$$\forall y, y \in \mathbb{R}; \forall y', y' \in \mathbb{R}, \quad N(y) \times N(y') = N(y + y').$$

On pose $[N(y)]^1 = N(y)$ et

$$\forall n, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad [N(y)]^n = N(y) \times [N(y)]^{n-1}.$$

Établir par récurrence que

$$\forall n, n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad [N(y)]^n = N(ny).$$

Retrouver ainsi le résultat du A 6.