∽ Baccalauréat C (oral) Lille juin 1968 ∾

Exercice 1

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que, $\overline{z}$ désignant le conjugué de z, a un nombre complexe donné et $\overline{a}$ le conjugué de a, l'on ait

$$(z-a)\left(\overline{z}-\overline{a}\right)=4a\overline{a}.$$

Exercice 2

Déterminer une limite supérieure de l'erreur commise en remplaçant $\sin 30^{\circ}02'$ par $\sin 30^{\circ}$?

Exercice 3

Quelle est la nature de la courbe d'équation

$$2x^2+y^2-3x-5=0?$$

Exercice 1

On considère l'équation

$$z^2+\lambda z+1=0.$$

Quel est, dans le plan complexe, l'ensemble des images des racines de cette équation, lorsque λ varie ?

Exercice 2

Avec quelle approximation le nombre 1 est-il une valeur approchée de $\sqrt{(1,001)^5}$?

Exercice 3

1. Démontrer que l'équation

$$x^2-4y^2-2x-8y+3=0$$

   est celle d'une hyperbole.
2. Quelle est l'équation de cette hyperbole rapportée à ses asymptotes ?

Exercice 1

Linéariser $\cos^5 x$.

Exercice 2

Soit y et z deux fonctions de x telles que, y' et z' désignant leurs dérivées respectives, on ait

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} y' + 4z &=& 2\mathrm{e}^{2x}\\ z' - y &=& \mathrm{e}^{2x}\end{array}\right.$$

1. Former une équation différentielle du second ordre en y.
2. Intégrer cette équation et en déduire la solution générale du système (1).

Exercice 3

Démontrer que l'équation

$$y = \frac{3x^2 + 4}{4x}$$

est celle d'une hyperbole.

Exercice 1

Calculer l'angle aigu x tel que

$$\cos x = \sqrt[4]{3} - 1.$$

Exercice 2

Déterminer la limite, quand x tend vers zéro, de l'expression

$$y = \frac{4\left(1 - \sqrt{\cos x}\right)}{x^2}.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = (3 + 4\mathrm{i})z - 4 - 8\mathrm{i}.$$

Exercice 1

Les lettres u et v désignant deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]-1~;~+1[$, à tout couple $(u~;~v)$ on associe le nombre w défini par

$$w = u \star v = \frac{u + v}{1 + uv}.$$

Démontrer que la loi notée $\star$ est une loi de composition interne sur l'intervalle $]-1~;~+1[$ et qu'elle confère à cet intervalle une structure de groupe abélien.

Exercice 2

Déterminer la limite, quand x tend vers 1, de l'expression

$$y = (1 - x)\text{tg}\,\frac{\pi x}{2}.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = -2\text{i}z + 5.$$

Exercice 1

Dans le plan complexe, déterminer par son équation l'ensemble des points M d'affixe z tels que, $\overline{z}$ désignant le conjugué de z, on ait

$$z.\overline{z} + 3\left(z + \overline{z}\right) = 7.$$

Exercice 2

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, déterminer les coordonnées du point P, intersection des deux courbes d'équations

$$y^2 = 2px \quad \text{et} \quad x^2 = 2qy.$$

2. Calculer l'aire, S, du domaine limité par ces deux courbes.
3. Déterminer l'ensemble des points P lorsque p et q varient de telle façon que l'aire S conserve une valeur positive donnée, k.

Exercice 3

On considère un triangle ABC rectangle en A ; on désigne respectivement par a, b et c les mesures de ses côtés BC, CA et AB.
Déterminer le barycentre des points A, B et C, affectés respectivement des coefficients a^2, b^2 et c^2 ?

Exercice 1

Déterminer le nombre complexe z tel que

$$z.\overline{z} + 3\left(z - \overline{z}\right) = 4 - 3\text{i}.$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{4x - 5}{(x - 1)(x_2)}\,\text{d}x.$$

Exercice 3

Démontrer que l'équation

$$x^2+y^2-(2-3m)x-2(m-1)y-(5m+11)=0,$$

dans laquelle m désigne un paramètre, est l'équation d'une famille de cercles constituant un faisceau à points de base.

Exercice 1

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que les images des nombres $1, z$ et $1+z^2$ soient alignées.

Exercice 2

Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes d'équations

$$y=x^2 \quad \text{et} \quad y=x^2-\frac{2}{x^2}$$

et les droites d'équations

$$x=1 \quad \text{et} \quad x=b\ (b>1).$$

Quelle est la limite de cette aire quand b tend vers $+\infty$?

Exercice 3

Démontrer que l'équation

$$x^2+y^2-2(m-1)x-2(2m+1)y+7m+12=0,$$

où m désigne un paramètre, est l'équation d'une famille de cercles constituant un faisceau à points de Poncelet.

Exercice 1

Étant donné un nombre complexe a, d'image A, construire l'ensemble des points M, images des nombres complexes z vérifiant la relation suivante :

$$z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2.$$

Exercice 2

1. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

entre 0 et b $(0<b<1)$.

2. La formule obtenue ci-dessus introduit un nombre θ compris entre 0 et 1. Calculer θ en fonction de b.
Déterminer la limite de θ quand b tend vers zéro.

Exercice 3

On donne, dans le plan, quatre droites quelconques : Ox et Oy, O$'x'$ et O$'y'$.
Trouver un point ayant même polaire par rapport à Ox et Oy d'une part, à O$'x'$ et O$'y'$ d'autre part.

Exercice 1

Démontrer que, a, b et c étant trois nombres quelconques appartenant à l'ensemble des entiers naturels, on a l'implication suivante :

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 \text{ (mod. 7)} \to a.b.c = 0 \text{ (mod. 7)}$$

Exercice 2

Étudier les variations de la fonction

$$y = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Exercice 1

Déterminer la base d'un système de numération dans lequel les nombres

$$\overline{123},\quad \overline{140},\quad \overline{156}$$

sont en progression arithmétique.

Exercice 2

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}.$$

Exercice 3

On considère la fonction- suivante :

$$y = -x^3 + x.$$

1. Construire le graphique, (C), de cette fonction.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
3. Déterminer m de telle façon que la droite d'équation $y = mx$ partage ce domaine en deux parties ayant des aires égales.

Exercice 1

Dans la division du nombre $a = 529\,565$ par un nombre entier b, les restes partiels successifs sont $246, 222$ et 542.
Trouver b et le quotient de cette division.

Exercice 2

Étudier les variations de la fonction

$$y = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = 2z + 1 - \mathrm{i}.$$

Exercice 1

Soit q et r le quotient et le reste de la division d'un nombre entier a par un nombre entier b.
Sachant que $a + b + r = 3\,025$ et $q = 50$, rétablir la division.

Exercice 2

Étudier les variations de la fonction

$$y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = -z + 2(1 - \mathrm{i}).$$

113

Exercice 1

Soit N le nombre qui, dans le système décimal, s'écrit $\dfrac{49}{84}$.
Écrire ce nombre dans le système binaire.

Exercice 2

La lettre a désignant un nombre réel positif et différent de 1, résoudre l'inéquation suivante :

$$\log_a x > \log_{a^3}(3x+2).$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})z.$$

Exercice 1

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, le nombre

$$A_n = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$$

est divisible par 17.

Exercice 2

La lettre n désignant un nombre tel que $n \in \mathbb{N}^{\star}$, déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de

$$u_n = \sqrt[n]{\operatorname{Log} n}.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = (1+\mathrm{i})z.$$

Exercice 1

1. Factoriser le trinôme bicarré

$$z^4 - 2\varphi z^2 + 1.$$

2. Résoudre, dans le corps, $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^4 - 2\cos\varphi z^2 + 1 = 0,$$

où $-\pi \leqslant \varphi \leqslant +\pi$.

Exercice 2

Déterminer la limite, quand x tend vers zéro, de

$$\frac{\text{Log}\,(1+x)}{x}$$

Exercice 3

Étant donné, dans l'espace, quatre points quelconques, A, B, C et D, déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\left(\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}} + 3\overrightarrow{M\text{C}}\right).\cdot\left(\overrightarrow{M\text{D}} + \overrightarrow{M\text{A}}\right) = 0.$$

Exercice 1

Étant donné un nombre complexe a, d'image A, déterminer le nombre complexe z de telle façon que les images des nombres

$$az^2, \quad a^2z \quad \text{et} \quad z^3$$

soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 2

Calculer l'intégrale indéfinie

$$I = \int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3

Quelle est la nature de la courbe d'équation

$$y^2 = 3x^2 - 2x + 1?$$

Exercice 1

Déterminer le nombre complexe z de telle façon que les images des nombres

$$\mathrm{i}, \quad z \quad \text{et} \quad \mathrm{i}z$$

soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 2

Calculer l'intégrale définie

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère cartésien, $x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y$, déterminer la nature de la transformation définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 4x-3y, \\ y' & = & 3x+4y. \end{array}\right.$$

Exercice 1

On considère l'équation suivante :

$$(1) \qquad z^{-}(2+\mathrm{i}\omega)z+\mathrm{i}\omega+2-\omega=0,$$

dans laquelle ω désigne un nombre donné, réel ou complexe.
Montrer qu'il existe une valeur de ω pour laquelle l'équation (1) admet deux racines complexes conjuguées. Calculer alors ces racines.

Exercice 2

Calculer l'intégrale indéfinie

$$I = \int x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3

Étant donné une droite fixe, (D), et un point fixe, F, non situé sur cette droite, déterminer l'ensemble des centres des cercles tangents à (D) et vus, du point F, sous un angle de 90° ?

Exercice 1

Dans le système décimal, un nombre N s'écrit ainsi :

$$\overline{1x1yxy}.$$

Déterminer les chiffres x et y de telle façon que ce nombre soit divisible par 63.

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^y & = & y^x,\\ x^3 & = & y^2.\end{array}\right.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)z.$$

Exercice 1

Calculer la somme des diviseurs du nombre 3 600.

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7\left(\log_x y + \log_y x\right) & = & 50,\\ xy & = & 256.\end{array}\right.$$

Exercice 3

Dans le plan complexe, étudier la transformation définie par

$$z' = -\mathrm{i}z + 1.$$
