Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Limoges juin 1969 ∽

EXERCICE 1

En représentant par a un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs et par α un élément de l'ensemble, $\mathbb{Q}$, des nombres rationnels, on désigne par $x = (a,\ \alpha)$ un élément du produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.
Soit $x = (a,\ \alpha)$ et $y = (b,\ \beta)$ deux éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$; on définit les deux lois suivantes :
loi $\star$: $x \star y = (a + b,\ \alpha\beta)$;
loi T : $xTy = (ab,\ \alpha + \beta)$.
Montrer que chacune de ces lois est commutative, associative et possède un élément neutre.
Déterminer, pour chacune d'elles, l'ensemble des éléments ayant un symétrique.
La loi T est-elle distributive pour la loi $\star$?

EXERCICE 2

On considère la fonction définie par

$$y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4}.$$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Étudier les branches infinies de sa représentation graphique ; donner les équations des asymptotes. (On ne demande pas la représentation graphique de la fonction.)

PROBLÈME

Soit un repère orthonormé, $x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y$; $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ sont les vecteurs unitaires respectifs de Ox et Oy ; A et A$'$ sont les points de l'axe $x'x$ d'abscisses respectives $+1$ et -1 ; (D) est la droite d'équation

$$y = (x - 1)\sqrt{3}.$$

On appelle (ω) tout cercle centré sur (D). On désigne par α et β les coordonnées de son centre et par R son rayon.

1. Construire la droite (D). Former l'équation des cercles (ω) en exprimant β en fonction de α.
2. Soit (O) le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$; on appelle (ω_1) les cercles (ω) orthogonaux au cercle (O). Soit B le point autre que A commun à (D) et à (O).
   Déterminer la relation entre R et α exprimant qu'un cercle (ω) est un cercle (ω_1) ; écrire l'équation de ces cercles en fonction du paramètre α. À quelles conditions ces cercles coupent-ils Ox ?
   Montrer que les cercles (ω_1) forment un faisceau, dont on précisera la nature et les points remarquables. Montrer que les polaires de A$'$ par rapport à tous ces cercles passent par un point fixe.
3. ω_1 étant le centre d'un cercle (ω_1), A$'\omega_1$ recoupe le cercle (O) en M. La médiatrice de Mω_1 coupe Aω_1 en J ; soit K le symétrique de O par rapport à J.
   Déterminer l'ensemble des points J et l'ensemble des points K.
   La perpendiculaire menée de K à la droite (D) coupe la médiatrice de Mω_1 en P. Quel est l'ensemble des points P ?

4. On appelle S et S' les extrémités du diamètre d'un cercle (ω_1) parallèle à Oy et l'on se propose de déterminer l'ensemble de ces points quand le cercle (ω_1), varie.

Écrire l'équation de la courbe obtenue, par rapport au repère $x\text{O}y$. Pour reconnaître la nature de cette courbe, on cherchera son équation par rapport à un repère $X_1\text{A}Y_1$ d'origine A, orthonormé, tel que $\left(\overrightarrow{\text{A}X_1}\,,\ \overrightarrow{\text{A}Y_1}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$ et que l'axe $\overrightarrow{\text{A}X_1}$ se déduise de l'axe Ax dans une rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

Reconnaître les éléments remarquables de la courbe et faire le dessin en prenant 2 cm pour longueur des différents vecteurs unitaires.

N. B - Les questions 3 et 4 sont indépendantes.