

♣ Baccalauréat C Limoges juin 1971 ♣

EXERCICE 1

Dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, on considère la loi de composition, notée \star , telle que

$$\forall (a; b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \star b = a + b + a.b.$$

Les signes $+$ et \times désignent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans \mathbb{N} .

1. Montrer que c'est une loi interne dans \mathbb{N} , commutative et associative. Admet-elle un élément neutre?
2. On définit $a^{(n)}$ pour $n \geq 1$ par

$$a^{(1)} = a \quad \text{et} \quad a^{(n)} = a^{(n-1)} \star a.$$

Exprimer a^0 , a^1 et a^2 , en fonction de a , et en déduire l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de a et de n .

EXERCICE 2

On donne dans un plan orienté trois droites (D_1) , (D_2) et (D_3) passant par O et telles que

$$(D_1, D_2) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{et} \quad (D_2, D_3) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Soit $\mathcal{S}_{(D_1)}$, $\mathcal{S}_{(D_2)}$ et $\mathcal{S}_{(D_3)}$ les symétries par rapport aux droites (D_1) , (D_2) et (D_3) [ou symétries axiales d'axes respectifs (D_1) , (D_2) et (D_3)].

1. Construire le transformé d'un point M du plan par la transformation T définie par

$$T = \mathcal{S}_{(D_3)} \circ \mathcal{S}_{(D_2)} \circ \mathcal{S}_{(D_1)}$$

Quelle est la nature de cette transformation T ?

2. On considère alors la transformation T' définie par $T' = \mathcal{S}_{(D_1)} \circ T$.

Quelle est la nature de cette transformation T' ? Ce produit est-il commutatif?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. $\text{Log } x$ désigne le logarithme népérien de x . Sa base est e .

1. On considère l'équation différentielle

$$xy' \text{Log } x + y - x = 0,$$

où y est la fonction inconnue de la variable x et y' sa dérivée par rapport à x . Trouver toutes les solutions de la forme $y = \frac{P(X)}{\text{Log } x}$, où P désigne une fonction de x , que l'on déterminera. Préciser, parmi ces solutions, celle dont la courbe représentative passe par le point, S, de coordonnées $(e; e)$.

2. Étudier la fonction qui à x fait correspondre

$$y = \frac{x}{\text{Log } x}.$$

On tracera la courbe représentative (Γ) par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On étudiera, en particulier, les branches infinies, les points remarquables et les tangentes en ces points.

3. On considère un point M_0 de (Γ) d'abscisse x_0 . Déterminer les points M de (Γ) où les tangentes à (Γ) sont perpendiculaires à la tangente à (Γ) en M_0 .

Discuter l'existence et le nombre de ces points M suivant les valeurs de x_0 . (Il pourra être intéressant, afin d'alléger les écritures, de poser $u = \text{Log } x$ et $u_0 = \text{Log } x_0$.)

Lorsque x_0 est choisi dans un domaine précisé lors de la discussion précédente, il existe deux points M répondant à la question. Ils seront notés M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2 .

Montrer que

$$\text{Log } x_1 + \text{Log } x_2 = \text{Log } \text{Log } x_1 \cdot \text{Log } x_2.$$

En déduire que

$$\text{tg}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) + \text{tg}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_2}) = 1.$$

4. Les tangentes en M_1 et M_2 à (Γ) coupent l'axe $x'Ox$ respectivement en P_1 et P_2 d'abscisses x'_1 et x'_2 .

Montrer que $x'_1 \cdot x'_2 = x_1 \cdot x_2$.

On appelle m_2 la projection orthogonale sur $x'Ox$ de M_2 .

Démontrer que l'axe radical du cercle de diamètre $M_1 m_2$ et du cercle circonscrit à $M_2 P_1 P_2$ passe par un point fixe lorsque M_0 varie sur (Γ) dans les conditions précisées à la question 3.