

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Limoges juin 1972 ∞

EXERCICE 1

L'espace \vec{E}_3 est un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et \vec{E}_2 est un espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$.

On considère l'application linéaire, f , de \vec{E}_3 vers \vec{E}_2 , qui associe à tout vecteur \vec{u} de \vec{E}_3 , ayant pour composantes scalaires $(x; y; z)$, le vecteur $f(\vec{u}) = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$, les composantes x' et y' étant déterminées par

$$x' = 2x - y - z \quad \text{et} \quad y' = -x + 2y + z.$$

Déterminer le noyau et l'image de f .

EXERCICE 2

On considère la fonction f , définie, pour x réel positif, par

$$f(x) = x[x - E(x)],$$

en désignant par $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x .

1. Dans le plan affine, rapporté à un repère orthonormé, construire le graphique de f pour $x \in [0; 3[$.

2. Soit k un entier positif; donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in [k; k+1[$, puis calculer

$$u_k = \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

Calculer $(u_{k+1} - u_k)$; en déduire que la suite finie $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ est une suite arithmétique, dont on donnera la raison et le premier terme.

Calculer $\int_0^n f(x) dx$, n étant un entier positif.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(1 - \text{Log } x), & x > 0, \end{cases}$$

(où le symbole $\text{Log } x$ désigne le logarithme népérien de x).

1. Déterminer, pour $x > 0$, la fonction dérivée, f' .

La fonction f est-elle continue à droite pour $x = 0$, dérivable à droite en ce point?

Construire le graphique, (\mathcal{C}) , de f par rapport à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ainsi (\mathcal{C}) aux points d'ordonnée nulle.

2. Calculer l'aire $A(x)$ du domaine plan limité par l'axe Ox , la courbe (C) et les parallèles à l'axe Oy d'abscisses respectives x et e . On définit ainsi une fonction A , qui, à $x > 0$, fait correspondre $A(x)$; trouver la limite A_0 de A quand x tend vers 0; déterminer $x > e$, pour que $A(x)$ soit égal à A_0 .
3. a. Vérifier que, pour tout x strictement positif, $f(x) - xf'(x) - x = 0$.
En déduire l'ordonnée du point, T , où la tangente à (C) en un point d'abscisse x coupe l'axe (O, \vec{i}) .
- b. Vérifier que toute fonction, g_m , définie, pour $x > 0$, par

$$g_m(x) = mx - x \operatorname{Log} x$$

(où m est une constante réelle), vérifie la relation

$$(1) \quad g_m(x) - xg'_m(x) - x = 0.$$

Déterminer la fonction, g , qui vérifie la relation (1) et qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

4. a. Soit (C_1) le graphique de la fonction g . Montrer que (C_1) est homothétique de (C) dans une homothétie de centre O , dont on déterminera le rapport.
- b. Soit M un point de (C) et N le point de même abscisse sur (C_1) ; donner les coordonnées du point commun des tangentes en M et en N respectivement à (C) et à (C_1) .