Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Limoges ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = 1 - \left|\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{3x}\right|$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f pour $x = 0$.
2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ en prenant 3 centimètres comme unité de longueur.
3. Soit λ un nombre réel négatif. Déterminer, en centimètres carrés et en fonction de λ l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équation $y = 1$, $x = \lambda$ et $x = 0$.

EXERCICE 2

z désigne un nombre complexe non nul et $\overline{z}$z son conjugué.
On fait correspondre à $z\,(z = x + \mathrm{i}y)$ le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un plan affine euclidien P de repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

1. Montrer que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ ou $2z\overline{z} = z + \overline{z}$.
2. On suppose la deuxième condition satisfaite ; quel est l'ensemble des points M ?
3. Soit $\theta = \operatorname{Arg} z$; calculer en fonction de θ, $|z|$, puis $\dfrac{2z-1}{z^2}$.

PROBLÈME

$\mathscr{P}$ désigne un plan affine de direction le plan vectoriel P et de repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.
f est une application affine de $\mathscr{P}$ laissant O invariant et dont l'endomorphisme associé est φ.
On suppose que la matrice de φ appartient à $M \cup M'$, où M est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ et M' l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -a+b \\ b & -a \end{pmatrix}$ les réels a et b vérifiant la relation $a^2 + b^2 - ab = 1$.
À tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ on associe le nombre réel

$$F\left(\overrightarrow{u}\right) = x^2 + y^2 - xy.$$

Partie A

1. Montrer que tout élément de $M \cup M'$ a un inverse que l'on calculera. Quelle est la nature de f lorsque la matrice de φ appartient à M'.

Déterminer avec précision f_0 correspondant à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $M \cup M'$ est un groupe pour la multiplication des matrices et que M en est un sous-groupe commutatif.

3. Montrer que quel que soit $\overrightarrow{u}$ élément de P, $F\left[\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right] = F\left(\overrightarrow{u}\right)$.

Partie B

Soit E l'ensemble des points N de $\mathscr{P}$ tels que $F\left(\overrightarrow{\mathrm{O}N}\right) = 1$.

1. Montrer que E est invariant par f.

2. Étudier la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x + \sqrt{4 - x^2}}{2}.$$

et tracer sa courbe représentative γ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Montrer que $\mathrm{E} = \gamma \cup f_0(\gamma)$

Partie C

Soit Φ l'application de P × P dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u'}\right) = x\,.\,x' + y\,.\,y' - \frac{1}{2}\left(x\,.\,y' + y\,.\,x'\right)$$

où $(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ désignent respectivement les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire. Définir la norme associée.

2. On suppose que le plan vectoriel P est muni de la norme euclidienne précédente. Reconnaître alors E.

Quelle est la nature de φ quand sa matrice appartient à M ? à M' ?

Calculer l'angle des vecteurs $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Faire la figure.