Durée : 4 heures

↫ Baccalauréat C Limoges juin 1976 ↬

EXERCICE 1

Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 3, 4.
On tire deux boules simultanément et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules tirées.

1. Quelle est la loi de probabilité de X?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X?

EXERCICE 2

1. Montrer que tout réel x différent de (-1) vérifie l'égalité :

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-x)^n}{1+x}$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Log}\,2-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$$

(Log signifiant logarithme népérien).

2. Montrer que pour tout entier naturel n différent de zéro et pour tout x élément de $[0\,;\,1]$ on a la double inégalité :

$$-x^n\leqslant\frac{(-x)^n}{1+x}\leqslant x^n.$$

En déduire les inégalités :

$$-\frac{1}{n+1}\leqslant\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n+1}$$

et la limite, quand n tend vers $+\infty$ de la suite

$$u_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

PROBLÈME

Partie A

On considère dans le plan affine euclidien π rapporté à un repère orthonormé $\left(\omega,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ l'application affine g qui, à tout point H de coordonnées $(p\ ;\ q)$ associe le point H' de coordonnées $\left(p'\ ;\ q'\right)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p' &=& p\text{Log}\,x - q\text{Log}\,y\\ q' &=& p\text{Log}\,y + q\text{Log}\,x\end{array}\right.$$

x et y étant des paramètres réels strictement positifs, le symbole Log désignant le logarithme népérien.

1. Pour quelle valeur du couple $(x\ ;\ y)$, l'application g n'est-elle pas bijective sur π ?
2. Dans cette question, on considère les couples $(x\ ;\ y)$ comme les coordonnées d'un point M d'un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   - **a.** Déterminer l'ensemble des points M tels que g soit une homothétie.
   - **b.** Déterminer l'ensemble des points M tels que g soit involutive.
     On trouvera deux points et on précisera, pour chacun, la nature de g.
   - **c.** Déterminer l'ensemble (K) des points M tels que g soit une isométrie affine. On se bornera à donner l'équation de (K).

Partie B

On appelle P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et P^+ l'ensemble des points de P dont les coordonnées sont strictement positives.
On considère l'application $\varphi : P \to \text{P}^+$ telle que l'image par φ d'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ soit le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \text{e}^x\\ y' &=& \text{e}^y\end{array}\right.$$

(e étant la base des logarithmes népériens).

1. Montrer que φ est une bijection de P sur P^+. Existe-t-i! des points de P invariants par φ ?
2. Donner l'équation de $\varphi(D)$, image par φ de la droite (D) d'équation :

   $$ax + by + c = 0.$$

   On précisera la nature et la position de $\varphi(D)$ dans les cas particuliers suivants :
   - **a.** a (ou b) est nul.
   - **b.** $a = b$.

Partie C

1. Montrer que l'image par φ du cercle de centre O et de rayon 1 est l'ensemble (K) défini au A 2. c).
2. Étudier les fonctions numériques :

$$y_1 = \mathrm{e}^{\sqrt{1-\mathrm{Log}^2 x}}, \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\mathrm{Log}^2 x}}.$$

Déduire de leurs représentations graphiques le tracé de (K).

Montrer que (K) admet la première bissectrice comme axe de symétrie. Calculer les coordonnées des intersections A et B de cette bissectrice et de (K).

Déterminer les points de contact A$'$ et B$'$ de (K) avec les tangentes à (K) issues de O.

Nature du quadrilatère AA$'$BB$'$.

Note : Les parties A et B sont entièrement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. La partie C dépend partiellement de A et de B.