

♣ Baccalauréat C Limoges juin 1977 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $2i$.
Soit z un nombre complexe; résoudre l'équation :

$$Z^2 - [(3-i)z + 2i]Z + 2(1-i)z^2 + (1+3i)z - 1 = 0 \quad (E)$$

où l'inconnue est le nombre complexe Z .

2. Dans la plan complexe \mathbb{P} , on note m , M' et M'' les images des nombres z , Z' et Z'' , Z' et Z'' étant les racines de l'équation (E). On définit ainsi deux applications de \mathbb{P} dans \mathbb{P} , notées

$$f : m \mapsto M' = f(m) \quad \text{et} \quad g : m \mapsto M'' = g(m).$$

Donner la nature géométrique de f et g et préciser leurs éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Dans le corps des classes résiduelles modulo 7 : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, dont les éléments seront notés

$$\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}\}$$

résoudre l'équation $x = \dot{3}x + \dot{5}$.

2. On considère l'application de \mathbb{N} dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ définie par $n \mapsto u_n$ tel que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dot{3}u_n + \dot{5} \\ u_0 = \dot{2}. \end{cases}$$

On pose $u_n = v_n + \dot{1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis u_n en fonction de n .

Calculer u_{1977} .

PROBLÈME

12 POINTS

On considère la fonction réelle à variable réelle f définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto e^{-x^2}.$$

1. **a.** Montrer que f est trois fois dérivable et calculer les dérivées successives f' , f'' , f''' .
b. Étudier les fonctions f' , f'' , f''' et construire les courbes représentatives.
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par P_0 , P_1 , P_2 , P_3 les fonctions telles que

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = -2x \quad ; \quad P_2(x) = 4x^2 - 2 \quad ; \quad P_3(x) = -8x^3 + 12x.$$

- a. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E .
- b. Soit Q la fonction polynôme de E définie par $Q(x) = 3 - 10x + 4x^3$.
Quelles sont les coordonnées de Q dans la base précédente?
- c. Calculer les trois nombres

$$A_i = \int_{-1}^{+1} P_i(x)e^{-x^2} dx \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3\}.$$

- d. Soit ϕ l'application de E dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall T \in E, \quad \phi(T) = \int_{-1}^{+1} T(x)e^{-x^2} dx.$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.

On pose $A = \int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx$. On ne cherchera pas à calculer A .

Calculer en fonction de A le nombre

$$B = \int_{-1}^{+1} Q(x)e^{-x^2} dx.$$

Si T est un élément de E , calculer en fonction de A :

$$C = \int_{-1}^{+1} T(x)e^{-x^2} dx.$$

Déterminer le nombre de ϕ en fonction de A .

3. Soit P un plan affine rapporté à un repère orthonormé.

Soit M un point de P de coordonnées $(x; y)$ animé d'un mouvement défini par :

$$x(t) = f(t) \quad ; \quad y(t) = f'(t) \quad \text{avec } t \geq 0.$$

- a. Déterminer l'équation de la trajectoire et la construire en précisant le sens de parcours.
- b. Quels sont les vecteurs vitesse et accélération à l'instant t ? Pour $t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, construire le représentant de ces vecteurs d'origine M_0 .
- c. Préciser à quels instants et sur quelles parties de la trajectoire, le mouvement est accéléré ou retardé.

On donne $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065$ et $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,2231$.