Durée : 4 heures

Baccalauréat C Limoges juin 1979

EXERCICE 1 **3 points**

Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lllll}\bullet \text{ pour} & x \leqslant -\dfrac{1}{2} & f(x) & = & \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\ \bullet \text{ pour} & -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1 & f(x) & = & \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\\ \bullet \text{ pour} & x \geqslant 1 & f(x) & = & \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} + \log x\end{array}\right.$$

e étant la base des logarithmes.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels f est dérivable
2. Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$. (unité : 2 cm). :1. Calculer l'aire du domaine limité par $(\mathscr{C})$, l'axe $x'\mathrm{O}x$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$. En donner une valeur approchée avec 2 décimales.
   On donne :

x	e^x	e^{-x}	$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$	$\log x$
2	7,389 1	0,135 3	1,648 7	0,606 5	0,693 1

PROBLÈME **12 points**

Partie A

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé, direct $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ et un réel arbitraire m.
Soit l'application F_m de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout complexe α associe le complexe α' défini par $\alpha' = m\mathrm{i}\alpha + 1$ et l'application f_m de P dans P qui, à tout point M d'affixe α, associe le point M' d'affixe $\alpha' = m\mathrm{i}\alpha + 1$.

1. Discuter suivant la valeur du réel m la nature de f_m.
   Préciser dans chaque cas ses éléments géométriques caractéristiques.

2. Soit la conique (C) du plan P d'équation

$$x^2 + 2y^2 - 2x = 0.$$

Soit $\left(\mathrm{C}'_m\right)$ l'image de (C) par f_m, m étant dans cette question un réel non nul.
Donner l'équation de $\left(\mathrm{C}'_m\right)$. Préciser la nature de (C) et de $\left(\mathrm{C}'_m\right)$.
Tracer sur une même figure (C) et $\left(\mathrm{C}'_m\right)$.
Démontrer que les foyers de $\left(\mathrm{C}'_m\right)$ sont les images par f_m des foyers de (C).

3. Soit ω_m le point de P invariant par f_m (m réel quelconque). On pose

$$m = \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Montrer que les coordonnées de ω_m s'expriment sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ y & = & \dfrac{\sin 2\varphi}{2} \end{array}\right.$$

Déterminer l'ensemble des points ω_m quand φ varie dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Préciser la nature de cet ensemble.

4. On considère dans le plan P muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ un point mobile N. Ses coordonnées sont données en fonction du temps t par

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{avec } t \in [-1\,;\,+1].$$

En utilisant les résultats de la question précédente, préciser la trajectoire de N et la construire.
Construire sur la même figure les vecteurs vitesse et accélération aux dates $t = 1$ et $t = -1$.
Décrire le mouvement entre les dates $t = -1$ et $t = 1$ et préciser les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

Partie B

E est un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
Le plan P de la partie A est le plan $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Soit g_m l'application de E dans E qui, à tout point M de E de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$ définies par

- $F_m(x + \mathrm{i}y) = \left(x' + \mathrm{i}y'\right)$
  (F_m étant l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie au début de la partie A).
- et par $z' = mz$.

Dans toute cette partie m est un réel non nul.

1. Donner la définition analytique de g_m.

2. Déterminer l'image par g de l'hyperbole (H) du plan de repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ qui a pour equation dans ce repère $y^2 - z^2 = 1$.

   Tracer l'hyperbole (H) et son image g_m(H) chacune dans un repère convenable à préciser.

3. Démontrer que g_m est la composée dans un ordre quelconque de l'homothétie de centre ω_m et de rapport m et d'une rotation que l'on précisera (ω_m étant le point de P défini au 3. A).