

## ♣ Baccalauréat C Limoges juin 1981 ♣

### EXERCICE 1

Calculer l'intégrale  $\int_0^{2\pi} (\pi - |2x - \pi|) \sin x \, dx$ .

### EXERCICE 2

Soit un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .

1. Soit  $s$  la symétrie orthogonale par rapport au plan  $P$  dont une équation est :

$$y + 3z - 5 = 0.$$

Étant donné un point  $M$  de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x; y; z)$ , calculer les coordonnées  $(x'; y'; z')$  de son image  $M'$  par  $s$ .

2. On considère l'application  $f$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  qui, à tout point  $M$ , de coordonnées  $(x; y; z)$  par rapport au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , associe le point  $M''$ , dont les coordonnées  $(x''; y''; z'')$ , sont données par les relations

$$\begin{cases} x'' = x; \\ y'' = \frac{-4y + 3z - 3}{5}; \\ z'' = \frac{3y + 4z + 1}{5}. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est une isométrie involutive. Préciser sa nature et ses éléments remarquables.

3. Trouver la nature et les éléments remarquables de  $f \circ s$  par des remarques géométriques simples.

### PROBLÈME

Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ . On considère les suites  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes vérifiant :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+2} - 2Z_{n+1} \cos \theta + Z_n = 0$$

On donne d'autre part un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  de repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Le nombre  $Z_n$  est représenté par le point  $M_n$  de coordonnées  $x_n$  et  $y_n$ ;  $x_n$  et  $y_n$  désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z_n$ .

### Partie A

Pour les constructions demandées dans cette partie, on prendra

$$Z_0 = 3 + i, \quad Z_1 = 1 + 2i.$$

1. On suppose dans cette question  $\theta = 0$ . Construire les points  $M_0, M_1, M_2, M_3$ . Démontrer que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Calculer  $\overrightarrow{M_0 M_n}$  en fonction de  $\overrightarrow{M_0 M_1}$  et  $n$ .
2. On suppose dans cette question  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Construire les points  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_6$ . Montrer que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique.
3. On suppose dans cette question  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ . Construire les points  $M_0, M_1, M_2, M_3$ . Montrer que quel que soit  $n$ , le point O est isobarycentre de  $M_{n+1}, M_{n+2}$ . Montrer que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique.
4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 - 2Z \cos \theta + 1 = 0$ . On appelle  $\alpha$  et  $\beta$  ses racines. Montrer que si  $\forall n, Z_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  complexes quelconques, alors la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation (1).

### Partie B

On prend dans cette partie

$$\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = \lambda(\cos n\theta + i \sin n\theta) + m\bar{\lambda}(\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

où  $\lambda$  est un complexe donné non nul,  $\lambda = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels,  $\bar{\lambda}$  son conjugué et  $m$  un réel donné.

1. Remarquer que la suite  $(Z_n)$  vérifie la relation (1).
2. Calculer  $X_n$  et  $Y_n$  en fonction de  $a, b, m, \theta$ .
3. Exprimer  $\cos n\theta$  et  $\sin n\theta$  en fonction de  $x_n$  et  $x_n$  pour  $m \neq 1$  et  $m \neq -1$ .
4. Montrer que si  $m$  est différent de 1 et  $-1$ , les points  $M_n$  appartiennent à une conique qu'on précisera. La construire pour  $\lambda = 3 + 4i$  et  $m = 1/2$ .
5. Montrer que si  $m = 1$  alors  $Z_n$  est réel. Exprimer dans ce cas  $Z_n$  en fonction de  $a, b, \theta$ . Préciser  $Z_n$  dans le cas où  $\lambda = 1$  puis  $\lambda = i$ .

### Partie C

On désigne par  $(\mathcal{E}, +, \cdot)$  l'espace vectoriel des suites réelles et par  $\mathcal{E}'$  l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1).

1. Montrer que  $\mathcal{E}'$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
2. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (U_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (U_0, U_1). \end{aligned}$$

Montrer que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de  $\mathcal{E}'$  ?

3. Montrer que si  $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq \pi$ , la question B 5. fournit deux suites linéairement indépendantes de  $\mathcal{E}'$ . En déduire la forme générale des suites de  $\mathcal{E}'$ .
4. Retrouver, pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$  et  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  les périodes obtenues en A.