Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Limoges ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Déterminer les paires $\{a,\ b\}$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$2m+7d=111,$$

m désignant le PPCM et d le PGCD de a et de b.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a

$$\cos 3x=(2\cos 2x-1)\cos x.$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$S_n(\theta)=\text{Log}\left(2\cos\frac{\theta}{3}-1\right)+\text{Log}\left(2\cos\frac{\theta}{3^2}-1\right)+\cdots+\text{Log}\left(2\cos\frac{\theta}{3^n}-1\right).$$

où Log désigne le logarithme népérien et θ un nombre réel donné de l'intervalle $\mathrm{I}=\left]-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$.

a. Justifier l'existence de $S_n(\theta)$.

b. En utilisant la première question, montrer que

$$S_n(\theta)=\text{Log}\cos\frac{\theta}{2}-\text{Log}\cos\frac{\theta}{2.3^n}$$

c. Calculer $S(\theta)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(\theta)$.

3. Calculer $S'(\theta)$, pour tout θ de l'intervalle I, S' désigne la dérivée de S. En déduire la valeur de $\mathrm{J}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\text{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$.

PROBLÈME **12 points**

On considère E un espace vectoriel euclidien orienté, muni de la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

On note f_0 l'identité de E.

Partie A

Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \overrightarrow{\jmath}+\overrightarrow{k}\\ f\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{k}\\ f\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}\,. \end{array}\right.$$

1. Déterminer $f \circ f$ et vérifier que

$$f \circ f = f + 2f_0.$$

En déduire que f est une bijection et déterminer f^{-1} en fonction de f et de f_0.

2. Soit $f^n = f^{n-1} \circ f \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que f^n peut s'écrire

$$f^n = \mathcal{U}_n f + \mathcal{V}_n f_0$$

$\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ étant deux réels.
Calculer $\mathcal{U}_{n+1}$ et $\mathcal{V}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$.

3. Soit

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha_{n+1} & = & 2\mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1}\\ \beta_{n+1} & = & \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1}\end{array}\right. \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n puis β_{n+1} en fonction de β_n.
Calculer α_n et β_n en fonction de n.
En déduire $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et f^n en fonction de f et f_0.

Partie B

Soit $\varphi_{a,\,b}$ l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi_{a,\,b} = af_0 + bf.$$

On note Φ l'ensemble de ces endomorphismes avec $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que Φ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de E et que $\left(f_0,\ f\right)$ est une base de Φ.
2. Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,\,b}$ tels que

$$\varphi_{a,\,b} \circ \varphi_{a,\,b} = \varphi_{a,\,b} + 2f_0.$$

3. Montrer que $(\Phi,\ +,\ \circ)$ est un anneau commutatif unitaire.
4. Déterminer les couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels
   a. $\varphi_{a,\,b}$ est une symétrie vectorielle de E. Caractériser les symétries trouvées.
   b. $\varphi_{a,\,b}$ est une projection vectorielle de E. Caractériser les projections trouvées.
   c. $\varphi_{a,\,b}$ est une isométrie vectorielle de E. Caractériser les isométries trouvées.

La partie B est indépendante de A § 2) § 3).