Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Limoges septembre 1969 ∾

EXERCICE 1

On donne la fonction f telle que

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x.$$

1. Étudier ses variations.
2. La représenter graphiquement.

EXERCICE 2

1. Dans le plan complexe, construire les points d'affixes :

$$a = 2 - \mathrm{i}\,; \quad b = -3 - \mathrm{i}\,; \quad c = -2 + 6\mathrm{i}.$$

   Calculer sous forme cartésienne les quotients $\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$ et construire leurs images.
2. Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$(2 - \mathrm{i})z^2 - (3 + \mathrm{i})z - 2 + 6\mathrm{i} = 0.$$

   Construire les images des racines.

PROBLÈME

Étant donné un plan Π, on considère le cercle (C) de ce plan, de centre O et de rayon R, et un diamètre AB de ce cercle.
On appelle $\Pi^\star$ le plan privé de la droite AB ainsi que des droites (α) et (β) respectivement perpendiculaires en A et B à AB.
On définit une transformation ponctuelle T de la manière suivante : à tout point M de $\Pi^\star$ on fait correspondre le point M', intersection de la perpendiculaire à AB passant par M et de la polaire de M par rapport au cercle (C).

1. On appelle I le point d'intersection des polaires de M et M' par rapport au cercle (C). Démontrer que O est l'orthocentre du triangle IMM' et que I appartient à la droite AB.
2. **a.** Définir analytiquement la transformation T.
   Pour cela, on utilisera le repère cartésien orthonormé d'origine O tel que A ait pour coordonnées $(-\mathrm{R}\,;\,0)$.

   b. Pour les trois questions b α, b β, bγ, on donnera une solution en utilisant le repère et une solution n'utilisant pas le repère.

α. Démontrer que T est involutive.

β. Quels sont les points invariants par T ?

γ. Démontrer que le cercle (Γ) de diamètre MM' est, quel que soit M appartenant à $\Pi^{\star}$, orthogonal au cercle (C).

3. Soit p la puissance du point A par rapport au cercle (Γ) défini précédemment.

a. Évaluer p en fonction des coordonnées du point M.

b. Quels sont, dans l'inversion de pôle A et de puissance p, les transformés du cercle (Γ), du cercle (C), du point M et du point M' ?

c. Démontrer que le point M' est l'orthocentre du triangle AMB. Qu'en résulte-t-il pour les cercles circonscrits aux triangles AMB et AM'B ?

4. a. Étudier la figure transformée par T d'une droite passant par A, d'un cercle passant par A et B.

b. Que peut-on dire du mouvement de M' lorsque le point M décrit d'un mouvement uniforme une demi-droite d'origine A, un arc d'un cercle passant par A et B [la demi-droite ou l'arc ne coupant pas les droites (α) et (β)] ?

N. B. - Les trois parties du problème sont indépendantes.