Baccalauréat C Limoges septembre 1972

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur à 1.
Déterminer le plus grand commun diviseur des entiers naturels

$$A = n^2 + 1 \quad \text{et} \quad B = n\left(n^2 - 1\right).$$

EXERCICE 2

Étudier la fonction numérique

$$x \longmapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1}$$

et tracer sa courbe représentative dans un repère cartésien.

PROBLÈME

L'espace affine (E_3) étant rapporté à un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ on désigne par f l'application affine de (E_3) dans (E_3) définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 5x + 2y - 2z + 2,\\ y' &=& -4x - y + 2z - 2,\\ z' &=& 8x + 4y - 3z + 4.\end{array}\right.$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est un plan (P).
2. Démontrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que, pour tout point M de transformé M' par f, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartienne à D.
3. Démontrer qu'il existe un nombre réel k tel que, pour tout point M n'appartenant pas à (P) et de transformé M' par f, la droite MM' coupe le plan (P) en un point H tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.
   Déterminer k et définir l'application f.
4. En n'utilisant que la définition analytique de f, démontrer que l'application f est bijective, définir son application réciproque, f^{-1} et retrouver la nature de f déjà obtenue à la question 3.