

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Limoges septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Soit l'équation

$$z^2 + (1 - 2i)z + 1 + 5i = 0$$

définie dans l'ensemble des nombres complexes.

1. Trouver les deux racines z' et z'' de cette équation.
2. Soit A et B les images par rapport à un repère orthonormé des solutions z' et z'' , A étant le point dont l'abscisse est positive.

Déterminer le centre ω d'une rotation, dont l'angle mesure $\frac{\pi}{2}$ radians, qui transformerait A en B. (On précisera les coordonnées de ω).

EXERCICE 2

1. Construire les tables d'addition et de multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Résoudre chacune des équations suivantes où l'inconnue est, suivant le cas, x ou le couple $(x; y)$:

$$\begin{aligned} 2x &= \dot{1} \\ 2x &= \dot{0} \\ x + 3y &= \dot{1} \\ 2x + y &= \dot{0} \end{aligned}$$

x et y étant éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3. Déterminer les entiers relatifs a et b tels que $a + 3b - 1$ et $2a + b$ soient tous les deux multiples de 4.

PROBLÈME

On cherche à déterminer une fonction continue unique f , définie sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\begin{cases} (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, & f(x+y) + x + y = [f(x) + x][f(y) + y] \\ (2) \quad f(1) = e - 1 \end{cases}$$

1. En posant $x = y = \frac{t}{2}$, vérifier que

$$(3) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + t \geq 0$$

2. Démontrer que, s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) + x_0 = 0$, alors

$$(4) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + x = 0$$

En déduire que $f(x) + x$ n'est jamais nul et démontrer que $f(0) = 1$.

3. Démontrer que :

$$(5) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = [f(x) + x]^n - nx$$

Calculer $f(-x) - x$ et démontrer que :

$$(6) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = [f(x) + x]^n - nx$$

4. Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier q , l'expression :

$$f\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q}$$

Démontrer que :

$$(7) \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = e^x - x.$$

5. Vérifier que la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$ satisfait bien à (1) et (2). On admettra que cette fonction est la seule fonction continue sur \mathbb{R} ayant cette propriété.

a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Construire la courbe représentative de f dans un système d'axes orthonormé.

Quelle remarque peut-on faire au sujet de la tangente à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse 1?

b. Évaluer l'aire $\mathcal{A}(x)$, de la portion de plan comprise entre la courbe (C), son asymptote et les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$ ($X < 0$).

6. a. Démontrer que l'on a :

$$(8) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x.$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n(a) = (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^n)$, $a > 0$.

Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de n satisfaisant à :

$$(9) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < P_n(a) < e^{\frac{a(1-a^n)}{1-a}}.$$

Démontrer enfin que pour $0 < a < 1$, il existe des nombres M dépendant de a et vérifiant :

$$(10) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(a) < M.$$

Préciser en fonction de a une valeur possible de M .