

## ∞ Baccalauréat C Limoges septembre 1977 ∞

### EXERCICE 1

5 POINTS

Pour tout réel donné  $a$  strictement positif, on considère la fonction  $f_a$  de variable réelle  $x$ , définie par :

$$f_a(x) = \text{Log}(a - e^x).$$

On appelle  $\mathcal{C}_a$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , et  $D_a$  son domaine de définition.

1. Étudier  $f_a$  construire sa courbe représentative  $\mathcal{C}_a$  et déterminer l'ensemble image  $f_a(D_a)$ .
2. Montrer que  $f_a$  est une bijection de  $D_a$  sur  $f_a(D_a)$ . Déterminer son application réciproque, en déduire que  $\mathcal{C}_a$  possède un axe de symétrie,.
3.  $b$  étant un réel strictement positif, montrer que  $\mathcal{C}_b$  se déduit de  $\mathcal{C}_a$  par une translation qu'on précisera.

*Note* : Log désigne le logarithme népérien.

### EXERCICE 2

3 POINTS

$b$  est un entier naturel donné strictement supérieur à 1. On rappelle que

$$b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1).$$

1. Quel est le plus grand diviseur commun de  $b^2$  et  $(b - 1)$  ?
2. Quel est l'ensemble des solutions appartenant à  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation

$$b^2x + (b - 1)y = 1?$$

3. Application numérique : résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

$$9x + 2y = 1.$$

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

Soit  $E$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & -a+b \end{pmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels,

1. Démontrer que  $E$  muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . En donner une base.
2. Démontrer que  $E$  muni de l'addition et de la multiplication des matrices a une structure d'anneau. Est-ce un corps?
3. Soit  $\mathcal{P}$  le plan vectoriel euclidien de base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{P}$  dont la matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est un élément de  $E$ .  
Définir, suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ , le noyau et l'image de  $f$ .  
 $f$  peut-il être involutif? Dans ce cas, préciser la nature de  $f$ .

### Partie B

On suppose, dans toute la suite,  $a = 1$  et  $b = 0$ .

Soit  $P$  le plan affine euclidien associé à  $\mathcal{P}$ , rapporté au repère cartésien orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
Soit  $F$  l'application affine de  $P$ , associée à  $f$ , laissant le point  $I$  de coordonnées  $(1; 2)$  invariant.

1. Tout point  $M$  de  $P$ , de coordonnées  $(x; y)$  a pour image par  $F$  le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$ . Exprimer les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x; y)$  de  $M$ .
2. À tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  de  $P$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$  ( $z$  affixe de  $M$ ).  
Si  $z'$  est l'affixe de  $M'$  et  $z$  l'affixe de  $M$ , montrer que :

$$z' = (1 + i)\bar{z} - 2 + 3i$$

( $\bar{z}$  désigne le nombre complexe conjugué de  $z$ ).

Donner la nature et les caractéristiques de l'application affine  $F$ .

3. Soit  $S$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine d'équation

$$y = (1 - \sqrt{2})x + 1.$$

Quelle relation lie les affixes d'un point  $M$  et de son symétrique  $N$ ?

Préciser la nature de l'application affine  $G = S \circ F$ ; en donner les caractéristiques.

4. Soit la famille de courbes  $(C)$  définie par l'équation

$$y^2 = m^2 x^2 - 2x + 1$$

où  $m$  est un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de  $m$  la nature des courbes  $(C)$ .

Construire la courbe correspondant à  $m = \frac{1}{2}$  et son image par  $G$ .