

## ☞ Baccalauréat C Limoges septembre 1979 ☞

### EXERCICE 1

4 POINTS

$\mathbb{C}$  étant un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , on considère l'application :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto f(z) = az + b\bar{z} \end{cases}$$

( $\bar{z}$  désigne le nombre complexe conjugué de  $z$ ).

où  $a \in \mathbb{R}_+$  et où  $b$  est le nombre complexe de module  $a$  et d'argument  $\theta$ ,  $\theta$  étant un réel différent de  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire dont on donnera la matrice dans la base  $(1; i)$  de  $\mathbb{C}$ .
2. Déterminer le noyau  $\text{Ker } f$  et l'image  $\text{Im } f$  (on exprimera un vecteur de  $\text{Ker } f$  et un vecteur de  $\text{Im } f$  en fonction de  $\theta$  seul).
3. Montrer que  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{C}$ .

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit un sac contenant six jetons numérotés, 0, 0, 1, 2, 3, 6.

On tire successivement trois jetons, en notant à chaque fois le numéro inscrit sur le jeton et en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac. On admet que tous les tirages sont équiprobables.

On obtient ainsi un triplet de nombres  $(a, b, c)$  et à chacun d'eux on associe la fonction polynôme

$$f: x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On définit une variable aléatoire  $X$  (ou aléa numérique) en associant à chaque triplet obtenu le degré du polynôme  $f$  (on conviendra que le polynôme nul est de degré 0).

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ ; calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

$\alpha$  est un nombre réel strictement positif différent de 1.

#### Partie A

On considère l'application :

$$f_\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} f_\alpha(t) = \frac{t + t^\alpha}{2} \text{ si } t \neq 0 \\ f_\alpha(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle  $(C_\alpha)$  la courbe représentative de  $f_\alpha$  dans un repère orthonormé.

1. Étudier la continuité de  $f_\alpha$  en  $x = 0$ .

2. Étudier les variations de  $f_\alpha$ .
3. Préciser suivant les valeurs de  $\alpha$  la demi-tangente à la courbe  $(C_\alpha)$  au point d'abscisse 0 ainsi que la branche infinie de la courbe  $(C_\alpha)$   
Dans chaque cas donner l'allure générale de la courbe  $(C_\alpha)$ .

### Partie B

Soit  $V_2$  l'espace vectoriel réel, euclidien orienté de dimension 2 rapporté à la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

$t$  étant fixé,  $t$  réel strictement positif, on considère l'application linéaire  $T_t$  de  $V_2$  dans  $V_2$  dont la matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est :

$$\begin{pmatrix} \frac{t+t^\alpha}{2} & \frac{t-t^\alpha}{2} \\ \frac{t-t^\alpha}{2} & \frac{t+t^\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

1. On considère :

$$E_\lambda = \{ \vec{u} \in V_2 \mid T_t(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \}$$

$\lambda$  étant un réel donné.

Montrer que si  $t$  est différent de 1, il existe deux réels distincts  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $E_{\lambda_1}$  et  $E_{\lambda_2}$  ont d'autres éléments que le vecteur nul.

Montrer que  $E_{\lambda_1}$  et  $E_{\lambda_2}$  sont deux droites vectorielles dont on choisira des bases respectives  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  telles que  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  soit une base orthonormée directe de  $V_2$ . Écrire la matrice de  $T_t$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ .

2. Soit  $M$  l'ensemble des applications  $T_t$  quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $(M, \circ)$  est un groupe commutatif isomorphe à  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ , la loi  $\circ$  étant la loi de composition des applications.
3. On considère l'espace affine euclidien  $E_2$  associé à  $V_2$ . Soit  $\mathcal{R}$  le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $b_t$  l'application affine d'endomorphisme associé  $T_t$  et admettant  $O$  pour point invariant. Soit  $A$  le point de coordonnées  $x = 0, y = 1$ ; soit  $A_1$  son transformé par  $T_t$ . Déterminer les coordonnées de  $A_1$  dans le repère  $\mathcal{R}_1$  déduit de  $\mathcal{R}$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .
4. On considère le point  $B$  dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}_1$  sont  $X = t, Y = t^\alpha$ .  
Montrer que  $B$  se déduit de  $A_1$  par une transformation simple que l'on déterminera.