

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Lyon juin 1972 ☞

EXERCICE 1

Les nombres x , y et z étant trois entiers naturels, on suppose que l'écriture en base x de y est 131, que l'écriture en base x de z est 101.

1. Montrer que l'on peut, sans connaître x , exprimer, dans le système de base x , le produit xyz .
2. Sachant que, de plus, la somme $x + y + z$ est égale, dans le système décimal, au nombre 50, déterminer, dans le système décimal, le nombre x et le produit xyz .

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel strictement positif.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x qui à x associe

$$f(x) = \frac{\text{Log } x}{x^n}$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x).

1. Étudier le sens des variations de la fonction f .
Tracer, pour $n = 2$, sa courbe représentative.
2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 ; calculer

$$g(a) = \int_1^a \frac{\text{Log } t}{t^2} dt.$$

PROBLÈME

On donne un nombre réel a strictement positif et un plan affine euclidien (P) , rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. À tout point, M , de coordonnées $(x; y)$ dans ce plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$, que l'on appelle affixe de M . Soit A , et A' les points d'affixes respectives a et $-a$. Soit (P^*) le plan (P) privé du point A .

On définit l'application, T , de (P^*) dans (P) , qui, à chaque point $M \in (P^*)$, associe le point M' tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \\ \text{et} \\ \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{A'M'} \end{array} \right. \text{appartiennent à la même droite vectorielle.}$$

($\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MM'}$ désigne le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{MM'}$.)

Partie A

1. Donner une construction géométrique de M' à partir de M .
Construire les images des points, M_1 et M_2 d'affixes respectives $2a + ia$ et $2a$, et celle d'un point arbitraire, M_3 du cercle de diamètre $[AA']$ (M_3 étant distinct de A).
2. Soit $z' = x' + iy'$ l'affixe de $M' = T(M)$. Calculer x' et y' en fonction de x et de y . Montrer que, si $\bar{z} = x - iy$ est le nombre complexe conjugué de z , on a

$$z' = \frac{\bar{z}(z - a)}{\bar{z} - a}.$$

Comparer les modules de z et de z' .

3. Déterminer les points de (P^*) qui sont invariants par T .
Quelle est l'image par T d'un cercle de centre O et de rayon R ? (On devra distinguer le cas exceptionnel où $R = a$.) L'application T est-elle injective?

Partie B

On donne un point M_0 de (P^*) , non situé sur la droite (AA') ni sur le cercle de diamètre $[AA']$. On désigne son affixe par z_0 et le module de cette affixe par R tel que $R = |z_0|$.
À partir de M_0 , on construit la suite des points $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ d'affixes $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, telle que, pour tout entier naturel n , on ait $M_{n+1} = T(M_n)$.

1. Que peut-on dire du module de z_n , pour tout $n \neq 0$? En déduire la valeur du produit $z_n \bar{z}_n$.
Montrer que l'on peut écrire

$$z_{n+1} = \frac{R^2(z_n - a)}{R^2 - az_n}.$$

2. On considère la suite à termes complexes définie par

$$u_n = \frac{z_n + R}{z_n - R}$$

pour tout $n \neq 0$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n , u_0 et $k = \frac{R - a}{R + a}$, puis montrer que l'on a

$$z_n + R = \frac{2Rk^n u_0}{k^n u_0 - 1}$$

En déduire la limite de la suite réelle de terme général $|z_n + R|$, lorsque n augmente indéfiniment.