

Durée : 4 heures

♣ Baccalauréat C juin 1975 Lyon ♣

**EXERCICE 1**

$z$  désignant l'affixe d'un point  $M$  du plan complexe  $\mathbb{P}$ , soit  $f$  et  $g$  les applications de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{P}$  définies par :

$$\begin{aligned} f: M(z) &\longmapsto M'(z') \quad \text{avec} \quad z' = z^2 \\ g: M(z) &\longmapsto M'(z') \quad \text{avec} \quad z' = (\sqrt{3} + i)z^2 + i \end{aligned}$$

1. Montrer qu'il existe une similitude directe  $s$  telle que  $g = s \circ f$ . Préciser le centre, le rapport et l'angle de  $s$ .
2. Soit  $h$  l'application de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{P}$  définie par :  
 $h: M(z) \longmapsto M'(z')$  avec

$$z' = (\sqrt{3} + i)z^2 + 2i(\sqrt{3} + i)z - \sqrt{3}.$$

Montrer qu'il existe une translation  $t$  telle que  $h = g \circ t$ . Préciser le vecteur de  $t$ .

**EXERCICE 2**

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  les restes dans la division par 7 des entiers naturels  $2^n$  et  $3^n$ .

En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que

$$2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{7}$$

**PROBLÈME**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par

$$f_{a,b}(x) = a + \frac{b}{x-2} \quad \text{avec} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

**Partie A**

1. On considère l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R} - \{2\}$ , muni des lois usuelles d'addition de deux fonctions et de multiplication d'une fonction par un réel.  
Montrer que  $E$  en est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que  $(f_{1,0}, f_{0,1})$  est une base de  $E$ , notée  $\mathcal{B}$ . Donner les coordonnées de  $f_{a,b}$  dans cette base  $\mathcal{B}$ .

3. Montrer que les fonctions  $g$  définies sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par

$$g(x) = \frac{cx + d}{x - 2} \quad \text{avec } (c; d) \in \mathbb{R}^2$$

sont des éléments de  $E$ . Trouver leurs coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

4.  $f_{a,b}$  étant un élément quelconque de  $E$  et  $f_{a,b}^{(n)}$  sa dérivée d'ordre  $n$ ,  $n$  étant un élément de  $\mathbb{N}^*$ , déterminer par récurrence  $f_{a,b}^{(n)}$  et montrer que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par :

$$h(x) = (x - 2)^n f_{a,b}(x)$$

est élément de  $E$ . Trouver ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Partie B

Pour tout couple de réels  $(\alpha; \beta)$  on désigne par  $\varphi_{\alpha, \beta}$  l'application de  $E$  dans  $E$  telle que  $\varphi_{\alpha, \beta}(f_{a,b})$  est définie par :

$$\varphi_{\alpha, \beta}(f_{a,b}) : x \longmapsto \alpha f_{a,b}(x) + \beta(x-2)f'_{a,b}(x)$$

1. Montrer que  $\varphi_{\alpha, \beta}$  est un endomorphisme de  $E$  et trouver sa matrice dans la base  $\mathcal{B} = (f_{1,0}, f_{0,1})$ .
2. Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $\varphi_{\alpha, \beta}$  soit un endomorphisme involutif et dans chacun des cas préciser la nature de  $\varphi_{\alpha, \beta}$  et préciser ses éléments remarquables.

### Partie C

1. Montrer que, quel que soit le couple  $(a; b)$  de nombres réels, l'intégrale

$$\int_0^1 (f_{a,b}(x))^2 dx$$

est positive ou nulle. On admettra que cette intégrale est nulle si, et seulement si,  $(a; b) = (0; 0)$ .

Calculer cette intégrale. En déduire que  $1 - 2\log^2 2 > 0$ .

2. Soit  $\Phi$  l'application de  $E \times E$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\Phi(f_{a,b}, f_{a',b'}) = \int_0^1 f_{a,b}(x) \times f_{a',b'}(x) dx$$

Montrer que  $\Phi$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

On suppose dans les deux questions suivantes que  $E$  est muni de ce produit scalaire,

3. Calculer  $\|f_{1,0}\|$ .

Déterminer  $f_{a,b}$  telle que  $(f_{1,0}, f_{a,b})$  soit une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $E$  et que  $b$  soit positif.

4. Soit  $\mu$  l'application de E dans E telle que :  $\mu(f_{a,b})$  est définie par :

$$\mu(f_{a,b}) : x \mapsto 2b \operatorname{Log} 2 - a + \frac{b}{x-2}$$

Montrer que  $\mu$  est une isométrie vectorielle de E. Déterminer les éléments de E invariants par  $\mu$ . Quelle est la matrice de  $\mu$  dans la base  $\mathcal{B}'$  ?

**N. B.** - Les parties B et C sont indépendantes.