

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lyon juin 1979 ∞

EXERCICE 1

3,5 points

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme φ de E défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= -6\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) &= -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) &= \vec{0}_E. \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau de φ , en donner une équation cartésienne.
Déterminer l'image de φ , en donner une base.
Démontrer que le noyau et l'image de φ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Soit \vec{u} un vecteur quelconque de l'image de φ . Exprimer $\varphi(\vec{u})$ en fonction de \vec{u} .
3. Démontrer que φ est l'endomorphisme composé d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle à déterminer.

EXERCICE 2

3,5 points

On considère le système d'inconnue $(x; y)$ dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ ax - by &= c \end{cases}$$

ou a, b, c désignent trois paramètres éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pour déterminer a, b, c on lance trois fois un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le premier numéro sorti donne a , le second b et le troisième c .

1. Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.
2. Calculer les probabilités :
 - a. p_1 pour que le système ait une infinité de solutions;
 - b. p_2 pour qu'il n'ait aucune solution;
 - c. p_3 pour qu'il ait une solution unique;
 - d. p_4 pour qu'il admette la solution unique $(3; 0)$.

On donnera les résultats sous forme de fractions ayant 108 pour dénominateur.

PROBLÈME

13 points

Soit a un réel strictement positif. Dans ce problème on cherche à résoudre dans \mathbb{R}_+^* : l'équation

$$(E_a) \quad a^x = x^a.$$

d'inconnue x et de paramètre a , équation qui admet évidemment la solution $x = a$. Pour cela on utilise les fonctions

$$f_a : x \mapsto x^a \quad g_a : x \mapsto a^x \quad h_a : x \mapsto x \log a - a \log x.$$

L'étude des fonctions f et g_a figurant au programme de Terminale C, le candidat pourra utiliser sans justification tout résultat concernant ces fonctions. Au besoin, il considèrera que la fonction f_a est prolongée par continuité au point 0 et que $f_a(0) = 0$.

I - Étude de cas particuliers

1. On suppose $a = e$.

- a. Dresser le tableau des variations de la fonction h_e .
- b. En déduire la résolution de l'équation (E_e) .
- c. Démontrer que l'on a $\frac{x}{\log x} \geq e$ pour tout $x > 1$.

2. On suppose $a = 2$.

- a. Dresser le tableau des variations de la fonction h_2 et la représenter graphiquement dans un plan muni d'un repère orthonormé en prenant 2 cm pour unité de longueur. On placera en particulier les points d'abscisses entières $n \leq 5$.
- b. En déduire que l'équation (E_2) admet exactement deux solutions.
- c. Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine limité par les courbes représentatives de f_2 et g_2 (supposées tracées avec le même repère orthonormé, mais on ne demande pas les courbes) et situé entre les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

II - Étude du cas $0 < a < 1$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $f_a - g_a$.
2. En déduire que l'équation (E_a) n'a pas d'autre solution que la solution a .

III - Étude du cas $a > 1$ et $a \neq 1 = e$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction h_a .
2. Déduire de 1. et de la question (I - 1. c.) que h_a admet un minimum strictement négatif.
3. En déduire que l'équation (E_a) admet exactement deux solutions a et b .
4. Démontrer que l'on a toujours $b > 1$ et que l'on a $b < a$ si et seulement si $a > e$.

IV - Étude des solutions entières de (E_a) lorsque $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Le cas $a = 2$ ayant été traité au I, on suppose ici que a est un naturel strictement supérieur à 2. Dans ce cas l'étude faite au III prouve l'existence d'un réel b vérifiant $a^b = b^a$ et $1 < b < a$. On se propose de chercher si b est aussi un naturel.

1. Pour quelle valeur de a peut-on avoir $b = 2$?
On suppose désormais $b \in \mathbb{N}$ et $b \geq 3$.
2.
 - a. Prouver que a et b ont les mêmes diviseurs premiers.
 - b. Soit p un diviseur premier commun à a et b , α et β ses exposants dans les décompositions respectives de a et b en facteurs premiers. Démontrer que $\alpha b = \beta a$.
 - c. Dédire de a. et b. que a est un multiple de b et que si $a = kb$, alors $b^{k-1} = k$.
 - d. Démontrer que l'on a $b^{n-1} > n$ pour tout naturel $n \geq 2$.
 - e. Conclure.