∽ Baccalauréat C Lyon juin 1980 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que
   a. A soit divisible par six ;
   b. A soit divisible par cinq.
   En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.
2. On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit α un nombre réel vérifiant $0 < \alpha < \pi$. On considère l'équation en z

$$\text{(E)} \qquad z^2 \sin^2 \alpha - 4z \sin \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0.$$

1. Résoudre (E) dans le corps des nombres complexes.
2. On désigne par M' et M'' les images des racines z' et z'' de (E) dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ du plan complexe.
   Montrer que, lorsque α varie dans $]0 ; \pi[$, l'ensemble des points M' et M'' est une branche d'une hyperbole (H). Préciser les sommets et les asymptotes de (H) et dessiner la branche d'hyperbole en question.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et on note $\mathscr{B}$ une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de E.
Étant donné un nombre réel a, on considère l'endomorphisme φ_a de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & a\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & 2\vec{\imath} + a\vec{\jmath} \\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & a\vec{k} \end{array}\right.$$

On désigne par P le plan vectoriel de base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Vérifier que, pour tout $\vec{u} \in \text{P}$, $\varphi_a\left(\vec{u}\right) \in \text{P}$.

b. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Quelles sont les coordonnées de $\varphi_a\left(\overrightarrow{u}\right)$ dans cette base ?

Déterminer le noyau de φ_a suivant les valeurs de a. À quelle condition φ_a est-il bijectif ? Dans le cas contraire, déterminer l'image de φ_a et, pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de P, l'ensemble des antécédents de $\overrightarrow{v}$ par φ_a.

2. On suppose que E est euclidien et que $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction P rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$. On désigne par s la restriction de φ_a au plan vectoriel P et par S l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à s telle que $S(\text{O})$ soit le point O$'$ de coordonnées $(1-2\sqrt{3}\,;\,2)$.

Montrer que S est une similitude directe de $\mathcal{P}$. Déterminer pour $a = 2\sqrt{3}$ le rapport et le centre de S et une mesure en radians de son angle dans $\mathcal{P}$ orienté par $\left(\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie B

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles définies sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ de $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f_1(t) = \text{e}^{-t}\cos t,\quad f_1(t) = \text{e}^{-t}\sin t,\quad f_3(t) = \text{e}^{-t}.$$

1. a. Montrer que $\left(f_1,\,f_2,\,f_3\right)$ est une base de $\mathcal{E}$.

b. Soit f un élément de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans la base $\left(f_1,\,f_2,\,f_3\right)$. Montrer que la fonction dérivée f' de f est un élément de $\mathcal{E}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $\left(f_1,\,f_2,\,f_3\right)$.

c. En déduire que tout élément f de $\mathcal{E}$ a une primitive F et une seule dans $\mathcal{E}$ et déterminer $\mathcal{F}$.

2. Soit a un nombre réel. À tout élément f de $\mathcal{E}$ on associe la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$\tilde{f}(t) = (a+2)f(t) + 2f'(t)$$

où f' désigne la fonction dérivée de f. Montrer que l'on définit ainsi une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ notée ψ_a et que ψ_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Calculer les coordonnées de $\psi_a(f) = \tilde{f}$ dans la base $\left(f_1,\,f_2,\,f_3\right)$ en fonction des coordonnées de f dans cette base.

Partie C

On applique les résultats des parties A et B du problème au cas particulier où E = $\mathcal{E}$, $\mathcal{B} = \left(f_1,\,f_2,\,f_3\right)$ et $a = 0$. On a alors $\varphi_0 = \psi_0$.

Soit g l'élément de $\mathcal{E}$ défini par

$$g(t) = \text{e}^{-t}(\cos t - \sin t)$$

pour tout $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Étudier les variations de g et montrer que g est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J qu'on déterminera. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction réciproque g^{-1} ? Calculer le nombre dérivé en 1 de cette fonction g^{-1}.
2. Tracer la courbe représentative C de g dans un repère $\mathscr{R}$ orthonormé (unité : 1 cm). Placer les points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{4}$. Tracer aussi la courbe représentative C^{-1} de la fonction réciproque g^{-1}.

   Calculer l'aire en centimètres carrés du domaine D défini par la courbe (C), l'axe Ox et les droites $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}_g$ des fonctions antécédentes de g par φ_0 est constitué par les fonctions g_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, définies sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ par

   $$g_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\alpha + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right).$$

   Étudier les variations de g_α suivant les valeurs de α.

   Tracer les courbes représentatives de $g_{-\frac{1}{2}}$ et $g_{\frac{3}{2}}$ dans un repère orthogonal $\mathscr{R}' = \left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   (On prendra $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = 3$ cm, $\left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 1$ cm).

   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

   $$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \approx 4,8 \qquad ; \qquad \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}} \approx 0,6.$$