

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Lyon ∞

EXERCICE 1

4 points

- a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$.
b. Résoudre dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i = 0$$

dont on remarquera qu'elle admet une racine z_1 réelle.

On notera $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ ($x_2 < x_3$) les deux autres solutions.

- On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 .
Calculer le rapport et donner une mesure en radian de l'angle de la similitude plane directe de centre M_1 transformant M_2 en M_3 .

EXERCICE 2

4 points

Pour tout naturel $n \geq 1$ on pose

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt.$$

- À l'aide d'une intégration par parties calculer I_1 .
- Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$ on a

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

- En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$ on a

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} + I_n.$$

- Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
En déduire la limite quand n tend vers l'infini de

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!}.$$

PROBLÈME**12 points**

\mathcal{P} est un plan vectoriel euclidien et (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de ce plan, a est un réel et b un réel non nul. On note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de \mathcal{P} dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est $\begin{pmatrix} a & b^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Pour quelles valeurs de a et b , $\varphi_{a,b}$ est-il bijectif? Déterminer, suivant les valeurs de a et de b , le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$.

2. Dans cette question $a = b$.

On appelle h l'homothétie vectorielle de \mathcal{P} de rapport $\frac{1}{2b}$. Démontrer que l'application $p = \varphi_{a,b} \circ h$ est une projection vectorielle dont on précisera les ensembles qui la caractérisent.

En déduire que $\varphi_{a,b}$ est égal à la composée d'une homothétie vectorielle, dont on donnera le rapport, et d'une projection vectorielle.

3. Dans cette question $a = 0$ (et b est toujours un réel non nul).

Pour quelles valeurs du réel λ le système d'équations

$$\begin{cases} \lambda x - b^2 y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

d'inconnue le couple $(x; y)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, admet-il d'autres solutions que le couple $(0; 0)$?

Pour chaque valeur de λ trouvée, déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

En déduire qu'il existe deux droites vectorielles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 dont on donnera des équations cartésiennes, globalement invariantes par $\varphi_{a,b}$. À quelle condition ces droites sont-elles orthogonales?

Partie B

Soit P le plan affine euclidien associé au plan vectoriel \mathcal{P} rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans la suite du problème, toutes les constructions demandées se feront dans un même repère orthonormé, en prenant 2 cm pour unité de longueur sur les axes.

On appelle f l'application affine de P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = b^2 y \\ y' = x + \text{Log} b^2 \end{cases}$$

(où Log est le symbole du logarithme népérien).

1. Quelle est la matrice, relativement à (\vec{i}, \vec{j}) , de l'endomorphisme associé à f ? Montrer que f est bijective et déterminer analytiquement sa réciproque f^{-1} .

2. Déterminer, suivant les valeurs de b , l'ensemble des points invariants par f . Dans le cas où $b^2 = 1$, reconnaître f .
3. Quelles sont les droites affines D de P transformées en droites $f(D)$ parallèles à D ?
4. Construire les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \text{Log}x$. Démontrer que la courbe \mathcal{C}' est la transformée de la courbe \mathcal{C} par f .
Soit Δ la tangente à \mathcal{C} en un point M_0 d'abscisse x_0 .
Démontrer que la tangente à \mathcal{C}' au point $M'_0 = f(M_0)$ est la droite $\Delta' = f(\Delta)$.

Partie C

Soit t un réel. Un point mobile M a pour coordonnées dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, à l'instant t ,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t. \end{cases}$$

1. Construire la trajectoire Γ de M . Quelle est la nature du mouvement de M ?
2. A quels instants le point M coïncide-t-il avec le point A de coordonnées $(0; 1)$.
Démontrer que les courbes \mathcal{C} et Γ admettent en A la même tangente T .
3. Déterminer la nature de la trajectoire Γ' du point $M' = f(M)$.
Dans le cas où $b^2 = 2$ construire Γ' , placer les points $A, A' = f(A), O' = f(O)$ et la droite

$$T' = f(T).$$