

## ♣ Baccalauréat C Lyon juin 1983 ♣

### EXERCICE 1

4 POINTS

Soit un plan affine  $P$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ; soit  $m$  un entier relatif; soit  $(D)$  la droite d'équation  $3x - 4y = 6$  et  $(D_m)$  la droite d'équation  $16x + 3y = m$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $3x - 4y = 6$ .
2. Trouver les points de  $(D)$  dont les coordonnées sont des multiples de 6.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  telles que le point d'intersection de  $(D)$  et  $(D_m)$  ait des coordonnées entières.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  telles que les coordonnées entières du point d'intersection de  $(D)$  et  $(D_m)$  soient divisibles par 6.

### EXERCICE 2

4 POINTS

1.  $E$  est un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$D$  est la droite vectorielle de base  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .  $R$  est la symétrie d'axe  $D$ . ( $R$  est aussi appelé demi-tour d'axe  $D$ ).

Exprimer dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les vecteurs  $R(\vec{i})$ ,  $R(\vec{j})$ ,  $R(\vec{k})$ . (On pourra utiliser les images par  $R$  de vecteurs orthogonaux à  $D$ ).

2.  $\mathcal{E}$  est un espace affine associé à  $E$  rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $f$  l'application affine de  $\mathcal{E}$  dans laquelle un point  $M(x; y; z)$  a pour image  $M'(x'; y'; z')$  défini par :

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \\ y' &= -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 4 \\ z' &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 2 \end{cases}$$

Reconnaitre la nature de  $f$  et donner ses éléments caractéristiques. (On pourra rechercher les points  $M$  tel que  $\overrightarrow{Mf(M)}$  soit parallèle à  $D$ ).

### PROBLÈME

12 POINTS

**N.B. : les parties A et B sont indépendantes**

#### Partie A

Soit  $f$  la restriction de la fonction tangente à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et  $g$  la fonction définie par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $h = g \circ f$ .
2. Montrer que  $f$  a une application réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Construire sur une même figure les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$ .
3. Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  et calculer sa dérivée.
4. En déduire que  $g = f^{-1}$ .
5. Calculer  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ .

### Partie B

On considère les intégrales  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$  et  $J_n = \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt$  où  $n$  désigne un entier naturel.

1. Exprimer  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$  et de  $J_n$ .
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties qu'on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_{n+1} = 2(n+1)I_n$ .
3. Établir alors une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ . En déduire que pour tout  $n$

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}.$$

### Partie C

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 + \frac{1}{1 \times 3} \end{aligned}$$

et plus généralement pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1 \times 2}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 3 \times 5 \times 7} + \dots + \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}.$$

1. En utilisant les résultats du B, montrer qu'on a, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} dt.$$

2. On pose  $v_n = 2I - u_n$  où  $I$  est l'intégrale du A.  
Exprimer  $v_n$  à l'aide d'une intégrale. Montrer que pour tout  $t \in [0; 1]$ ,  
$$0 \leq \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1.$$
  
En déduire un encadrement de  $v_n$ .
3. Calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , puis celle de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. Déterminer un entier  $n_0$  tel que pour tout entier naturel  $n > n_0$ ,

$$\pi - 2u_n \leq 10^{-3}.$$