

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$z^4 + z^2 + 1 = 0,$$

où z est l'inconnue.

EXERCICE 2

On donne la fonction f de la variable réelle x définie par

$$\begin{cases} x \mapsto f(x) = x^2 \left(\text{Log } 2x - \frac{4}{3} \right) \text{ pour } x \text{ positif,} \\ x \mapsto f(x) = 0 \text{ pour } x \text{ nul,} \end{cases}$$

le symbole Log désignant le logarithme népérien.

Étudier les variations de cette fonction et construire son graphe dans un repère orthonormé.

(Lorsque x tend vers zéro, on pourra poser $2x = \frac{1}{u}$.)

PROBLÈME

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la transformation ponctuelle, \mathcal{T} , dans laquelle un point M de coordonnées $(x; y)$ a pour image le point M' dont les coordonnées $(x'; y')$ sont définies par

$$x' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y}{x^2}$$

Partie A

1. Préciser l'ensemble, E , de définition de \mathcal{T} .
2. Rechercher les points doubles éventuels de \mathcal{T} .
3. Démontrer que \mathcal{T} est bijective sur E . Étudier si, en outre, \mathcal{T} est involutive.

Partie B

(Δ_1) est la droite d'équation $x + 1 = 0$; elle coupe $x'Ox$ en A ; (Δ_2) est la droite d'équation $x - 1 = 0$; elle coupe $x'Ox$ en B .

Démontrer que le point M' est conjugué harmonique du point M par rapport aux points d'intersection de la droite OM et des droites (Δ_1) et (Δ_2) .

Partie C

Soit une droite (D) . Déterminer l'ensemble image par \mathcal{T} de $(D) \cap E$:

1. lorsque (D) est parallèle à $y'Oy$;
2. lorsque (D) est parallèle à $x'Ox$;
3. lorsque (D) passe par l'origine;
4. lorsque (D) n'est ni une parallèle à l'un des axes, ni une droite passant par l'origine.

Partie D

Dans cette partie, et jusqu'à la fin du problème, le point M sera un élément de la droite (D_0) d'équation

$$3x - 4y + 2 = 0.$$

1. Construire l'image de $(D_0) \cap E$ par \mathcal{T} .
2. Démontrer que les polaires, par rapport au cercle (C) de diamètre AB , associées aux points M de (D_0) , passent par un point fixe, I .
3. Démontrer que les cercles de diamètre IM sont orthogonaux à un cercle fixe. En déduire qu'ils forment un faisceau, \mathcal{F} , dont on déterminera la nature.
4. K est le point d'intersection de (D_0) et de OI .

On considère l'inversion, \mathcal{I} , de pôle I et de puissance $\lambda = IK^2$.

- a. Trouver l'ensemble, (Γ) , des points doubles de \mathcal{I} .
- b. Déterminer l'image du faisceau \mathcal{F} par \mathcal{I} .
- c. Déterminer l'image du cercle (C) par \mathcal{I} .