

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1972 ∞

EXERCICE 1

1. Soit, dans l'ensemble \mathbb{C} , des nombres complexes, l'équation $z^3 - i = 0$.
Trouver le module et l'argument de chaque racine.
L'une des racines est un nombre imaginaire pur, trouver la somme et le produit des deux autres racines.
2. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation

$$z^3 - i = 6(z + i).$$

EXERCICE 2

Étant donné quatre points A, B, C et D dans l'espace affine euclidien (\mathcal{E}) de dimension 3, déterminer l'ensemble (E) des points M de (\mathcal{E}) tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\|.$$

On devra distinguer un cas exceptionnel, pour lequel $(E) = (\mathcal{E})$. Quelle relation nécessaire et suffisante y a-t-il dans ce cas entre les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} ?

PROBLÈME

Soit r un nombre rationnel fixé arbitrairement ($r \in \mathbb{Q}$). On considère les deux fonctions f et g qui, à tout nombre réel $x \geq 0$, font correspondre, quand c'est possible, les nombres

$$f(x) = \frac{x + x^r}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x - x^r}{2}$$

Soit (P) un plan affine euclidien et (P^*) l'espace vectoriel associé. On rapporte le plan (P) à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où O est le point origine et \vec{i}, \vec{j} les deux vecteurs de base de (P^*).

Partie A

Soit (Γ_r) et (Γ'_r) les courbes qui représentent respectivement f et g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Indiquer, suivant les valeurs de r , quel est le domaine de définition des fonctions f et g . Préciser et tracer (Γ_r) et (Γ'_r) dans les cas particuliers $r = 0$ et $r = 1$.
Sauf dans ces deux cas, pour quelles valeurs de r la fonction f est-elle monotone sur son domaine de définition? Même question pour g .
Déterminer les tangentes à (Γ_r) et (Γ'_r) au point O , quand ces courbes passent par O (sauf le cas $r = 1$ déjà étudié).
Démontrer que, pour $r < 0$, il y a une droite qui passe par O et qui est asymptote à (Γ_r) et à (Γ'_r) .

2. On appelle M et M' les points respectifs de (Γ_r) et (Γ'_r) qui ont une même abscisse x . Quel est l'ensemble des milieux des segments de droite (MM') ?
En déduire une transformation involutive du plan (P) , pour laquelle (Γ_r) et (Γ'_r) sont homologues.
Tracer (de façon succincte et si possible de couleurs différentes) les courbes (Γ_r) et (Γ'_r) pour

$$r \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

Partie B

Pour une valeur donnée de r et pour chaque nombre $u > 0$, on désigne par L_u l'application linéaire de (P^*) vers (P^*) qui a pour matrice

$$\begin{pmatrix} f(u) & g(u) \\ g(u) & f(u) \end{pmatrix} \text{ relativement à la base } (\vec{i}, \vec{j}).$$

Soit (H) l'ensemble des applications L_u correspondant à tous les nombres $u > 0$ (pour une même valeur de r). Pour $v > 0$ et $u > 0$, on désigne par $L_u \circ L_v$ l'application composée obtenue en effectuant l'application L_v suivie de L_u .

1. Démontrer que $L_u \circ L_v = L_{uv}$. Y a-t-il dans (H) un élément neutre pour cette loi de composition \circ ? Cette loi est-elle commutative dans (H) ?

Pour chaque valeur $u > 0$, l'application L_u est-elle bijective? Si oui, déterminer son application réciproque, L_u^{-1} , et la matrice de cette application linéaire L_u^{-1} relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) . A-t-on $L_u^{-1} \in (H)$?

Quelle conclusion peut-on tirer de ces propriétés?

2. Déterminer tous les vecteurs $\vec{v} \in (P^*)$ tels que l'image $L_u(\vec{v})$ appartienne à la même droite vectorielle que \vec{v} (on devra distinguer le cas exceptionnel $u = 1$ ou $r = 1$).

En déduire qu'il existe toujours deux droites vectorielles (D_1) et (D_2) qui sont globalement invariantes par L_u et qui sont orthogonales entre elles; on appellera (D_1) celle qui a une pente négative.

Soit deux vecteurs arbitraires non nuls $\vec{e}_1 \in (D_1)$ et $\vec{e}_2 \in (D_2)$; déterminer leurs images $L_u(\vec{e}_1)$ et $L_u(\vec{e}_2)$. En déduire la matrice de L_u dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , en fonction de u et de r .

3. On choisira maintenant \vec{e}_1 et \vec{e}_2 de façon qu'ils soient unitaires et que leurs composantes relatives à \vec{i} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) soient positives.

Soit A le point du plan (P) ayant pour coordonnées $(1; 1)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Sachant que la matrice de L_u relativement à cette base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est $\begin{pmatrix} u^r & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, préciser l'ensemble (E) des points M de (P) , tels que $OM = L_u(OA)$, obtenus lorsque u décrit l'intervalle $]0; +\infty[$. Tracer (E) dans les cas $r = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{2}$.