

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation :  $x^2 - y^2 = 1$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation :  $x^2 - y^2 = P$  où  $P$  est un naturel premier.

EXERCICE 2

Soit  $P$  le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $P$  dont l'affixe  $z$  est telle que :

$$z^3 + z^2 + z + 1 \text{ appartient à } \mathbb{R}.$$

Représenter cet ensemble.

PROBLÈME

$V$  est un espace vectoriel réel de dimension 2, muni d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ .  $E$  est un espace affine admettant  $V$  pour espace vectoriel associé et muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Partie A

Pour tout couple de réels  $(a; b)$  on définit un endomorphisme de  $V$  noté  $\varphi_{(a; b)}$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$M_{(a; b)} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ ab & 1+b \end{pmatrix}$$

On appelle  $\Delta_1$  (respectivement  $\Delta_2$ ) la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{i} - a\vec{j}$  (respectivement  $\vec{i} - a\vec{j}$ ).

1. Vérifier que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont distinctes si et seulement si :  $a + b \neq 0$ .
2. À quelle condition  $\varphi_{(a; b)}$  est-il bijectif? Dans le cas où il ne l'est pas, déterminer son noyau et son image.
3. Calculer la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de l'endomorphisme  $\varphi_{(a; b)} \circ \varphi_{(a; b)}$ . Existe-t-il des endomorphismes  $\varphi_{(a; b)}$  involutifs?
4.  $\lambda$  étant un réel, on appelle  $V_\lambda$  l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  de  $V$  tels que  $\varphi_{(a; b)}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ .  
Montrer que pour deux valeurs du réel  $\lambda$  ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ), distinctes ou confondues,  $V_\lambda$  contient des vecteurs non nuls. Déterminer  $V_{\lambda_1}$  et  $V_{\lambda_2}$ .
5. On suppose :  $a + b + 2 = 0$ . Montrer que  $\varphi_{(a; b)}$  est alors la symétrie vectorielle par rapport à  $\Delta_1$  suivant  $\Delta_2$ .

6. On suppose :  $a + b + 1 = 0$ . Montrer que  $\varphi_{(a; b)}$  est alors la projection vectorielle sur  $\Delta_1$  suivant  $\Delta_2$ .

### Partie B

Pour tout couple de réels  $(a; b)$  on considère l'application affine  $f_{(a; b)}$  de  $E$  vers  $E$  dont l'endomorphisme associé est  $\varphi_{(a; b)}$  et qui laisse invariant le point  $O$ .

1. Reconnaître l'application  $f_{(a; b)}$  dans le cas où :  $a + b + 2 = 0$  puis dans le cas où :  $a + b + 1 = 0$ .
2.  $V$  est un espace euclidien et le repère  $\mathcal{R}$  est orthonormé. On suppose  $a = t$  et  $b = e^t$ ,  $t$  étant un réel quelconque,  $e$  étant la base des logarithmes népériens.  $I$  est le point de coordonnées  $(1; -1)$ . On note  $M$  l'image à l'instant  $t$  du point  $I$  par l'application  $f_{(t; e^t)}$ .

Déterminer les coordonnées  $(x; y)$  du point mobile  $M$  en fonction du temps  $t$ . Montrer que la trajectoire de  $M$  est la courbe d'équation  $y = xe^x - e^x - 1$ .

Construire cette trajectoire. Déterminer le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de  $M$  à l'instant  $t$  et déterminer les instants où le mouvement de  $M$  est accéléré ou retardé.

**N. B.** : La partie B 2. est indépendante des résultats de la partie A.