

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = x(1 - \text{Log}|x|).$$

1. Étudier ses variations.
2. Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

e étant la base des logarithmes népériens.

EXERCICE 2

3 POINTS

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère, l'application f qui, à tout point $M(x; y)$, fait correspondre le point $M'(x'; y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Démontrer que f est une similitude et déterminer les éléments caractéristiques de f .

PROBLÈME

12 POINTS

Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre.

Soit \mathcal{M} l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} et de sa structure d'anneau unitaire.

Partie A

1. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer son carré.
2. On désigne par I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble F des matrices de la forme $A = \alpha I + \beta J$ où α et β sont des nombres réels.
3. **a.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M} , et que (I, J) est une base de F .
b. Montrer que F est stable pour la multiplication dans \mathcal{M} , et en déduire que F est un anneau commutatif et unitaire. Cet anneau est-il un corps?

Partie B

On appelle ψ l'application de F dans \mathbb{C} qui, à toute matrice $A = \alpha I + \beta J$ de F , associe le nombre complexe $z = \alpha + \beta i$.

1. **a.** Montrer que ψ est un isomorphisme de $(F, +)$ sur $(\mathbb{C}, +)$.
b. L'application ψ est-elle un isomorphisme de (F, \times) sur (\mathbb{C}, \times) ?
2. Aux deux nombres complexes $z = \alpha + i\beta$ et $z' = \alpha' + i\beta'$, l'application ψ^{-1} fait correspondre les deux matrices $A = \alpha I + \beta J$ et $A' = \alpha' I + \beta' J$.

On considère la loi de composition interne dans \mathbb{C} , notée \star et définie par

$$z \star z' = \psi(A \times A').$$

- a.** Exprimer $(\alpha + i\beta) \star (\alpha' + i\beta')$.
- b.** Quelle est la restriction de la loi \star à \mathbb{R} ?
- c.** Quelle est la restriction de la loi \star à l'ensemble des imaginaires purs?
3. Etant donné un nombre complexe z , on note $z^{(0)} = 1$, $z^{(1)} = z$ et $z^{(n)} = z^{(n-1)} \star z$ pour tout entier naturel non nul n .
a. Calculer $i^{(2)}$ puis $i^{(n)}$ pour $n > 2$.
 En posant $z = \alpha + i\beta$, démontrer que $z^{(n)} = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta i$ pour $n \geq 1$.
b. Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

$$z^{(2)} = 1; z^{(3)} = 1; z^{(n)} = 1; z^{(2)} - z - i = 0.$$

4. Dans le plan complexe, on considère le point M_1 d'affixe $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et les points M_2, M_3, \dots, M_n d'affixes respectives $z_2 = z_1^2, z_3 = z_1^3, z_n = z_1^n$.
 Calculer les coordonnées x_n et y_n du point M_n , puis les limites respectives des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie C

Soit P le plan vectoriel euclidien orienté de base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) et soit f l'endomorphisme de P de matrice $A = \alpha I + \beta J$ et soit φ l'endomorphisme de matrice J .

1. **a.** À quelle condition f est-il un automorphisme de P ?
b. Quel est le noyau de φ ? Quelle est l'image de φ ?
2. **a.** Soit ρ la rotation vectorielle de P dont la mesure (élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) admet pour représentant $\frac{\pi}{4}$.

On considère les vecteurs $\vec{i}_1 = \rho(\vec{i})$ et $\vec{j}_1 = \rho(\vec{j})$ qui forment donc une base (\vec{i}_1, \vec{j}_1) orthonormée directe. Exprimer \vec{i}_1 et \vec{j}_1 en fonction de \vec{i} et de \vec{j} .

- b.** Démontrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -2\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

En déduire la matrice de φ dans la base (\vec{i}_1, \vec{j}_1) . Soit $\vec{V} = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1$.

Quelles sont les composantes du vecteur $\varphi(\vec{V})$ dans la base (\vec{i}_1, \vec{j}_1) ?

- c. Démontrer qu'il existe une homothétie vectorielle h , une rotation vectorielle r et un projecteur p tels que $\varphi = h \circ r \circ p$.