Baccalauréat C Lyon septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.
Démontrer que les nombres $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.
Démontrer que le PGCD des nombres $2k-1$ et $9k+4$ est nécessairement 1 ou 17.
Pour quelles valeurs de k ce PGCD est-il égal à 17 ?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On identifiera le plan $\mathscr{P}$ au plan complexe en associant à tout point $M \in \mathscr{P}$, de coordonnées x et y, le nombre complexe $z = x + \text{i}y$.
Soit u un nombre complexe et f_u l'application, de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, associant à tout point $M(z)$ le point $M'\left(z'\right)$ où

$$z' = -u^2\overline{z} + 2\overline{u}.$$

1. Trouver la nature et les éléments géométriques caractéristiques de chacune des applications suivantes :
   - **a.** $f = f_u$ pour $u = 1$;
   - **b.** $g = f_u$ pour $u = \dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}$.
2. On pose $h = g \circ f$.
   - **a.** Déduire la nature de h de celles de f et g.
   - **b.** Construire géométriquement le centre de h.
   - **c.** Retrouver par le calcul les éléments de h.

PROBLÈME **12 POINTS**

Première partie

Pour tout couple de réels $(a ; b)$ on note $f_{(a,\, b)}$ la fonction, de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$f_{(a,\, b)}(x) = ax + b\,\text{Log}\,x,$$

et on appelle $C(a,\, b)$ la courbe représentative de $f_{(a,\, b)}$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que la courbe $C(-a ; -b)$ est l'image de la courbe $C(a ; b)$ dans une symétrie que l'on précisera.
2. Etudier les variations de $f_{(a,\, b)}$ suivant les valeurs de a et b.
3. Construire les courbes $C(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$, $C(1,\ 1)$ et $C\left(\dfrac{1}{\text{e}},\ -1\right)$ en prenant 2 cm pour unité de longueur.

4. **a.** Justifier, pour tout $x > 0$, l'existence de l'intégrale

$$A_{(a,\ b)} = \int_1^x f_{(a,\ b)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur.

b. Étudier la limite de $A_{(a,b)}(x)$ lorsque x tend vers zéro, puis celle de $\dfrac{1}{x^2}A_{(a,b)}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. En supposant $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $b = -1$, calculer, pour $\lambda > 0$, l'aire du domaine limité par la courbe $C(a,\ b)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = h$.

Deuxième partie

1. On appelle F l'ensemble des fonctions $f_{(a,\ b)}$. Démontrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ lorsqu'on le munit des lois d'addition des fonctions et de multiplication des fonctions par un nombre réel.

   Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?

2. On désigne par $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des réels strictement positifs. Déterminer les éléments de F qui sont des isomorphismes du groupe multiplicatif $(\mathbb{R},\ \times)$ sur le groupe additif $(\mathbb{R},\ +)$.

   Forment-ils un espace vectoriel ?

Troisième partie

On désigne par P le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer l'ensemble H des points M du plan P dont le produit des coordonnées est égal à leur somme. Montrer que H admet un centre de symétrie O.

   Écrire l'équation de H dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et donner la nature de H.

   b. Déterminer l'ensemble des points M du plan P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, tels que l'on ait :

$$f_{(a,\ b)}(xy) = f_{(a,\ b)}(x) + f_{(a,\ b)}(y)$$

   pour tout couple $(a\ ;\ b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. On appelle P$'$ l'ensemble P privé du point A$(1\,;\,0)$. On considère l'application h, de P$'$ dans P, qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $zz' = z + z'$.

   a. Prouver que M' est un élément de P$'$.

   b. Démontrer que h et involutive et déterminer ses points invariants.

   c. Calculer $(z-1)\left(z'-1\right)$.

   En déduire l'image par h du cercle Γ de centre A et de rayon 1. Quelle est la nature de la restriction de h à ce cercle Γ ?

   d. Montrer que l'image M' d'un point M de P$'$ d'affixe réelle x est un point d'affixe réelle x'. Quelle est la liaison avec l'ensemble H de 1. ?