

∞ Baccalauréat C septembre 1981 Lyon ∞

EXERCICE 1

Soit la fonction

$$f : x \mapsto x + \text{Log}(x + 1).$$

1. Étudier f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in]-1 ; 0]$.
Cette aire a-t-elle une limite quand α tend vers -1 par valeurs supérieures?

EXERCICE 2

1. Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs n tels que $n - 1$ divise $n + 3$.
2. Démontrer que pour tout entier relatif n , les entiers $n - 1$ et $n^2 + 2n - 2$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble F des entiers relatifs n tels que $(n - 1)(2n^3 + 1)$ divise $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$.

EXERCICE 3

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit U la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n+1}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et construire dans P les points A_n de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
Le dessin sera fait sur une feuille de papier millimétrique (unité : 2 cm) et sera appelé dans la suite « figure 1 ».
2. On désigne par V et W les suites telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$V_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad W_n = u_{2n+1}.$$

Démontrer que V et W sont des suites arithmétiques.

Calculer V_n et W_n en fonction de $n (n \geq 0)$ et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n-1} = -u_{2n}$.

3. On désigne par E l'ensemble des points A_n de coordonnées $(n; u_n)$ lorsque n décrit \mathbb{N} .

- a. Démontrer que E est inclus dans la réunion de deux droites D et D' que l'on dessinera sur la figure 1.
- b. On désigne par s l'application de P dans P qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \bar{z} + \frac{1}{2}i.$$

Quelle est la nature de s ? Caractériser géométriquement s .

- c. Démontrer que $D \cap D'$ est globalement invariant par s .
En est-il de même pour l'ensemble E?
4. Déterminer suivant la valeur du réel k la nature de l'ensemble C_k des points M de P tels que

$$\left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5}\right) = k.$$

Représenter C_k pour $k = \frac{27}{2}$ sur la figure 1.

Partie B

1. On considère la fonction

$$g : x \longmapsto 2x + 1 - \frac{2}{\pi} \cotg(\pi x).$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition de g .
Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par g_n la restriction de g à l'intervalle $]n; n+1[$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]n; n+1[$,

$$g_n(x) = g_0(x - n) + 2n.$$

- b. Donner le tableau de variation de g_0 puis celui de g_n pour $n \geq 1$.
- c. Démontrer que g_n est bijective.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ qui appartiennent à $]n; n+1[$.

2. On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{4} [1 - (2x + 1) \cos(\pi x)]$$

et on désigne par C sa courbe représentative dans P (ne pas construire C avant la question 2 d).

- a. Démontrer que l'ensemble E de la question A. 3 est inclus dans C .
- b. Démontrer qu'en tout point A_n de E la tangente à C est l'une des droites D ou D' de la question A 3.

- c. Démontrer que, pour tout réel x non entier,

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \sin(\pi x) \cdot g(x)$$

En utilisant la question B 1 établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ le tableau de variation de f sur $[n ; n + 1]$. On distinguera les cas n pair et n impair et on ne cherchera pas à calculer l'extrémum de f sur cet intervalle.

- d. Démontrer que pour tout réel positif x on a l'inégalité

$$-\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Tracer la partie de C correspondant à $x \in [0 ; 5]$.