

∞ Baccalauréat C Madagascar juin 1968 ∞

Exercice 1

Les nombres dix et onze du système décimal sont représentés respectivement par α et β .
Montrer, sans passer par l'intermédiaire du système décimal, que le nombre qui s'écrit $\alpha 040 \beta$ dans le système à base douze est divisible par onze.
Écrire ce nombre dans le système à base dix.

Exercice 2

Résoudre l'inéquation

$$\log_2 2x > 1 + \log_8 (3x + 2).$$

Exercice 3

PREMIÈRE PARTIE

Le plan étant rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, O étant l'origine, \vec{i} et \vec{j} respectivement les vecteurs unitaires des axes $x'Ox$, $y'Oy$, on définit la transformation ponctuelle T du plan de la façon suivante : tout point m du plan, de coordonnées $(x; y)$, est transformé par T en le point M de coordonnées $(X; Y)$ telles que

$$(1) \quad \begin{cases} X = x + 3y, \\ Y = 3x + y \end{cases}$$

et l'on note cette transformation

$$m \xrightarrow{T} M = T(m).$$

Étude de la transformation T

1.
 - a. Tout point du plan a-t-il un transformé par T ?
 - b. Tout point du plan est-il transformé par T d'un point unique du plan?
En déduire que la transformation T est une application bijective du plan sur lui-même.
Écrire les relations (2), analogues aux relations (1), qui définissent T^{-1} , transformation réciproque de T , c'est-à-dire, on le rappelle, telle que

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = U,$$

où U désigne la transformation identique du plan sur lui-même. (On rappelle que $g \circ f$ est le produit de l'application f par l'application g .)

- c. La transformation T admet-elle des points doubles?

2. a. Dans l'ensemble des points du plan, on définit la loi de composition interne suivante, notée (+) : à deux points quelconques, a et b , du plan, on fait correspondre le point unique c défini par $\overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}$ et l'on note $c = a + b$. On a donc

$$(c = a + b) \iff (\overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}).$$

Montrer que $T(a + b) = T(a) + T(b)$.

- b. Dans l'ensemble des points du plan, on définit la loi de composition externe suivante, notée multiplicativement : à tout couple (λ, a) , où λ est un nombre réel et a un point du plan, on fait correspondre le point unique b défini par $\overrightarrow{Ob} = \lambda \overrightarrow{Oa}$ et l'on note $b = \lambda a$.

On a donc

$$(b = \lambda a) \iff (\overrightarrow{Ob} = \lambda \overrightarrow{Oa}).$$

Montrer que $T(\lambda a) = \lambda T(a)$, puis que $T(\lambda a + \mu b) = \lambda T(a) + \mu T(b)$, où λ et μ sont des nombres réels.

- c. Montrer que l'ensemble des points du plan muni des deux lois de composition définies ci-dessus a une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.
3. Montrer que le barycentre, m , d'un système de n points, a_1, a_2, \dots, a_n affectés respectivement de coefficients réels, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dont la somme n'est pas nulle, est défini par l'égalité

$$m = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n).$$

En déduire que l'image par T du barycentre de n points est le barycentre des images par T de ces n points.

En particulier, en utilisant le fait que tout point m d'une droite déterminée par deux points, a et b , peut être considéré comme le barycentre de ces deux points affectés de coefficients convenables, en déduire que :

- la transformée par T d'une droite est une droite ;
- la transformée par T du milieu d'un segment ab est le milieu du segment AB , où $A = T(a)$ et $B = T(b)$;
- la transformée par T d'une division harmonique est une division harmonique.

4. Existe-t-il des points m et des nombres réels λ tels que

$$M = T(m) = \lambda m?$$

Montrer que l'ensemble des points m possédant cette propriété est constitué de deux droites passant par O .

5. a. b étant un point du plan, distinct de O , et a un point quelconque du plan, montrer que tout point m de la droite passant par a et parallèle à Ob peut être caractérisé par l'égalité $m = a + \rho b$, où ρ est un nombre réel.

Quelle est la direction de la transformée par T de cette droite ?

- b. Soit (C) la courbe, ensemble des points m du plan tels que $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{F(u)}$, où u est une variable réelle et où $\overrightarrow{F(u)}$ est le vecteur de composantes $f(u)$ et $g(u)$, f et g étant deux fonctions numériques dérivables de la variable réelle u .

Déduire de la partie a de cette question 5 que, si (C) admet une tangente, mt , en m , sa transformée (C') par T admet une tangente, MT , en M , transformée de mt .

SECONDE PARTIE

On suppose, dans toute cette partie, que le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

1. On considère le nouveau repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$, \vec{i}_1 et \vec{j}_1 étant définis par

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) & \text{et} \\ \vec{j}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}) \end{cases}$$

Montrer que ce nouveau repère est orthonormé et que l'on passe de $(O; \vec{i}, \vec{j})$ à $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ par une transformation simple, que l'on caractérisera.

2. Soit m le point du plan de coordonnées $(x_1; y_1)$ dans le repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$.

Quelles sont les coordonnées de $M = T(m)$ dans ce même repère?

En déduire que $T = I \circ J = J \circ I$, où I et J sont deux affinités orthogonales ayant pour axes respectifs ceux du repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ et dont on précisera les rapports.

Montrer que l'on peut également écrire

$$T = H_1 \circ I' = I' \circ H_1 = H_2 \circ J' = J' \circ H_2,$$

où H_1 et H_2 sont deux homothéties de centre O , dont on précisera les rapports, et I' et J' deux affinités orthogonales ayant pour axes ceux du repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ et dont on précisera les rapports.

3. On donne, dans le plan, le cercle (Ω) de centre ω de rayon R , où ω est un point donné du plan et R un nombre réel positif donné.

Quelle est la nature de la courbe $T(\Omega)$, transformée par T du cercle (Ω) ?

Préciser la direction de ses axes.

Quelle relation existe-t-il entre le centre de (Ω) et celui de $T(\Omega)$?

(On pourra utiliser les résultats de la question 2 de la seconde partie.)

4. Soit p et q deux points fixes du plan, symétriques par rapport à O et n'appartenant pas aux axes des affinités précédentes. On considère le faisceau linéaire de cercles (F) ayant pour points limites p et q .

- a. Montrer que l'ensemble, noté $T(F)$, des transformés des cercles du faisceau (F) est une famille d'ellipses ayant toutes les mêmes directions d'axes et la même excentricité.

Quel est l'ensemble des centres de ces ellipses?

En utilisant T^{-1} montrer que, par tout point M du plan n'appartenant pas à une droite (Δ) passant par O , que l'on caractérisera, il passe une ellipse et une seule de la famille $T(F)$, ellipse dont on construira les sommets.

Montrer que chaque ellipse de $T(F)$ coupe la droite PQ , où $P = T(p)$ et $Q = T(q)$, en deux points conjugués harmoniques par rapport à P et Q .

Montrer que par tout point M appartenant à (Δ) passent deux tangentes à chacune des ellipses de la famille $T(F)$ et que les droites joignant les points de contact des deux tangentes ainsi obtenues passent par un point fixe.