

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat C Madagascar septembre 1969 ❧

EXERCICE 1

Soit les ensembles  $E = [-1 ; +1]$  et  $E^* = [-1 ; +1] - \{0\}$ .

On considère la fonction  $f$  définie pour  $x \in E^*$  par

$$f(x) = x^2 \text{Log}|x| - 1$$

et  $f(0) = a$ , où  $a$  est un nombre réel donné.

1. Est-il possible de choisir  $a$  pour que  $f$  soit continue sur  $E$ ?  
Dans l'affirmative, montrer que  $f$  a alors une fonction dérivée  $f'$  continue sur  $E$ .
2. Étudier les variations et construire le graphe (C) de  $f$  dans un repère orthogonal.

EXERCICE 2

On pose  $u = 2 + \sqrt{3}$  et  $v = 2 - \sqrt{3}$ .

1. Démontrer par récurrence que,  $n$  désignant un entier positif, on peut écrire

$$u^n = a_n + b_n \sqrt{3}, \quad v^n = a_n - b_n \sqrt{3}$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont des entiers positifs.

Exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

2. Établir les égalités

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = 1.$$

En déduire que les fractions

$$\frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ sont irréductibles.}$$

PROBLÈME

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ , on donne les points  $a$  et  $b$  sur  $Ox$ , d'abscisses respectives  $-\sqrt{2}$  et  $+\sqrt{2}$ .

On se propose d'étudier la transformation ponctuelle  $T$  qui à un point  $m$  du plan associe le point  $m'$  défini de la façon suivante :

- si  $m$  n'est pas situé sur la droite  $ab$ , les points  $a, b, m, m'$  sont cocycliques et les pôles des droites  $ab$  et  $mm'$  par rapport au cercle (C) circonscrit au triangle  $abm$  sont conjugués par rapport à (C) ;

- si  $m$  appartient à la droite  $ab$ ,  $m'$  est l'inverse de  $m$  dans l'inversion de pôle  $O$  et de puissance 2.

### Partie A

1. Évaluer le produit  $Om \cdot Om'$ . (On pourra introduire le deuxième point d'intersection  $m'$  de  $Om$  avec le cercle passant par  $a, b$  et  $m$ .)  
En déduire que  $T$  peut être considérée de deux manières comme le produit commutatif de deux transformations simples, que l'on précisera.  $T$  est-elle involutive?
2. Déterminer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $m'$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  de  $m$ .  
Quels sont les points doubles de  $T$ ?

### Partie B Étude de l'image d'un cercle ou d'une droite

1. Déterminer l'image d'un cercle  $(C)$  passant par  $a$  et  $b$ . Montrer géométriquement et analytiquement l'existence d'une famille de cercles invariants centrés sur  $Ox$ .
2. Déterminer les droites invariantes par  $T$ .
3. Soit  $(\omega)$  le cercle de centre  $\omega(\beta; 0)$ ,  $|\beta| \geq \sqrt{2}$ , orthogonal au cercle  $(\gamma)$  de diamètre  $ab$ .  
Écrire sous forme normale l'équation de la tangente  $(U)$  en un point  $m$  de  $(\omega)$ .  
Discuter la nature de  $(U') = T(U)$ .  
Déterminer l'ensemble  $(H)$  des centres de  $(U')$  quand  $m$  décrit  $(\omega)$ . Préciser les éléments de cet ensemble. Cas particuliers.

### Partie C

À chaque point  $m$  de coordonnées  $(x; y)$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$  qui est l'affixe du point  $m$ .

Exprimer l'affixe  $z' = x' + iy'$  de  $m' = T(m)$  en fonction de  $z$ , soit  $z' = f(z)$ .

On considère dans le corps  $\mathbb{C}$  l'application  $g$  telle que  $g(z) = z - 1$  et l'application  $h$  définie par

$$h(z) = z + 1.$$

Soit  $T'$  la transformation ponctuelle du plan  $xOy$  qui associe au point  $m$  d'affixe  $z$  le point  $p$  d'affixe

$$Z = h \circ f \circ g(z).$$

1. Existe-t-il des points qui n'ont pas de transformés?  
 $T'$  est-elle involutive?
2. Déterminer les points doubles, ainsi que les images des droites passant par  $O$  et des cercles centrés en  $O$ .