Baccalauréat Madagascar septembre 1951
Série mathématiques

I

1er sujet
Démontrer que, si un nombre entier c divise le produit de deux nombres entiers a et b et est premier avec a, il .divise b.
Application : Sachant que $x_0 = 2$, $t_0 = 1$ satisfont à $5x - 3y = 7$, trouver tous les nombres entiers qui satisfont à cette équation.

2e sujet
Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction donnée irréductible soit égale à une fraction décimale.

3e sujet
Faire, sur on exemple, la théorie de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près.

II

PARTIE A

On considère dans un système d'axes rectangulaires les paraboles P et P' représentatives des fonctions

$$(P)\ \ y = x^2 - x, \quad (P')\ \ y = -x^2 + 2x.$$

1. Représenter, avec soin, sur le même graphique les courbes P et P'.
   La droite $(\Delta) x = \lambda$ coupe P en M, P' en M'. Écrire les équations des tangentes MT en M à P, $M'T'$ en M' à P'.
2. Calculer les coordonnées du point commun A à MT et $M'T'$ en fonction de λ.
   Quel est le lieu géométrique de A lorsque λ varie ? Préciser la droite sur laquelle ce lieu se trouve.

PARTIE B

Étude géométrique de la même question ; soient P et P' deux paraboles dont les axes sont parallèles : P de foyer F et de directrice D, P' de foyer F' et de directrice D'.
Une droite Δ variable parallèle aux axes de P et P' coupe P en M, P' en M', D en H, D' en H'.

1. Construire le point A commun aux deux tangentes en M et M' aux deux paraboles pour une position donnée de Δ.
2. Soit D_1 la médiatrice de HH', D_2 celle de FF'. Le point A se projette orthogonalement en H_1 sur D_1, en H_2 sur D_2.
   On choisira des orientations sur Δ et sur FF', ce qui donnera des valeurs algébriques aux distances AH_1 et AH_2.
   Évaluer

dans le triangle FAF' $\overline{F'A}^2 - \overline{FA}^2$,
dans le triangle HAH' $\overline{H'A}^2 - \overline{HA}^2$.

Qu'en conclure pour le rapport des segments $\overline{H_1A}$, $\overline{H_2A}$?
En déduire que A est sur une droite fixe δ quand Δ varie.

3. Chercher quel est le lieu du point A.
Discuter suivant l'existence des points communs à δ et à P.
Montrer que si P et P' ont des points communs, ces points sont aussi sur δ.
En déduire que deux paraboles d'axes parallèles ne peuvent avoir plus de deux points communs et donner un moyen de les construire.