Exercice 1. Sorcière d'Agnesi

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.
Soit d un nombre réel strictement supérieur à zéro. On considère le point S de coordonnées $(0; d)$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OS] et (t) la tangente en S au cercle $\mathscr{C}$.

Partie 1 : Définition géométrique

Dans cette partie, on choisit $d = 2$

Q1 : Construire, dans un repère (unité 2 cm), le cercle $\mathscr{C}$ et la tangente (t).
Placer un point A_1 sur le cercle distinct de O et de S.
La droite (OA_1) coupe la tangente (t) en un point noté B_1.
Placer le point P_1 ayant la même abscisse que B_1 et la même ordonnée que A_1.

Q2 : Sur la même figure, choisir un second point A_2 sur le cercle distinct de O et de S.
La droite (OA_2) coupe la tangente (t) en un point noté B_2.
Placer le point P_2 ayant la même abscisse que B_2 et la même ordonnée que A_2.
La *courbe d'Agnesi* est l'ensemble des points P obtenus par la construction précédente lorsque le point A parcourt le cercle.

Q3 : Tracer, l'allure de la courbe d'Agnesi.

Partie 2 : Équation de la courbe d'Agnesi

Dans cette partie, on considère un point A sur le cercle $\mathscr{C}$ distinct de O et S. On admet alors que la droite (OA) est sécante avec la droite (t) et l'on note B leur point d'intersection.
On définit alors le point P comme l'unique point ayant la même abscisse que B et la même ordonnée que A.
Notations : $(x; y)$ et $(x_A; y_A)$ désignent les coordonnées respectives des points P et A. On supposera que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Q1 : Démontrer que $xy = x_A d$.

Q2 : On note Ω le centre du cercle $\mathscr{C}$.

En remarquant que A appartient au cercle $\mathscr{C}$ équivaut à $\Omega A^2 = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$, démontrer que $x_A^2 = dy - y^2$.

Q3 : Déduire des deux questions précédentes que : $y = \dfrac{d^3}{x^2 + d^2}$

Q4 : Si A est confondu avec le point S, vérifier alors que les coordonnées du point P vérifient l'équation précédente.

Partie 3 : Étude de la courbe d'Agnesi.

Soit d un réel strictement positif fixé.
Dans cette partie, nous étudierons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{d^3}{x^2 + d^2}$$

On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q1 : La fonction f est-elle paire ? Impaire ?

Q2 : Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Q3 : Dans cette question, on choisit $d = 2$.
Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant les valeurs au centième près.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

Tracer la courbe de la fonction f dans le repère fourni.

Partie 4 : Quelques équations

Q1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{d}{2}$.

Q2 : Notons P le point de la courbe dont l'abscisse est la solution positive de l'équation précédente.
Ce point peut être obtenu à partir d'un point A situé sur le cercle $\mathscr{C}$ grâce à la construction décrite au début de l'exercice.
Déterminer l'angle $\widehat{\text{AOS}}$.

Q3 : De la même manière, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3\dfrac{d}{4}$
puis déterminer l'angle $\widehat{\text{AOS}}$ où le point A est défini comme à la question précédente.

Q4 : Avec un logiciel de calcul formel, on réalise la feuille de calculs suivante :

Entrée 1 :	`DeriverFonction(d^3/(x^2+d^2), x)`
Sortie 1 :	`-2*x*d^3/(x^2+d^2)^2`
Entrée 2 :	`DeriverFonction(-2*x*d^3/(x^2+d^2)^2, x)`
Sortie 2 :	`(-2*d^5+6*d^3*x^2)/(x^2+d^2)^3`

En déduire que la tangente à la courbe d'Agnesi qui a le plus petit coefficient directeur est obtenue lorsque l'angle obtenue lorsque l'angle $\widehat{\text{AOS}}$ mesure 30°.

Exercice 2. Partitions et moyennes

Le but de ce problème est la recherche de partition(s) réalisant le minimum des moyennes de moyennes d'un ensemble d'entiers.
Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel non nul et par $\text{E}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.
Une *partition* de E_n est un ensemble de parties disjointes d'éléments de E_n dont l'union est égale à E_n .
Par exemple, 1, 4, 2, 3 est une partition de E_n en trois parties ou sous-ensembles.

La *moyenne des moyennes* de cette partition est le nombre $\dfrac{1 + 4 + \dfrac{2+3}{2}}{3} = 2,5$.

Partie 1 : Étude pour le cas particulier de $n = 3$

On considère donc, dans cette partie, l'ensemble $\text{E}_3 = \{1, 2, 3\}$

Q1 : Donner sans justification la liste les cinq partitions de cet ensemble.

Q2 : Calculer pour chacune des partitions précédente la moyenne des moyennes.

Q3 : Préciser la partition pour laquelle la moyenne des moyennes est minimale.

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, on désigne par P_k la partition de E_n suivante en k sous-ensembles :

$$\text{P}_k = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{k-1\}, \{k, k+1, \ldots, n\}\}$$

On admet que pour tout entier naturel n, la partition qui permet d'obtenir la plus petite moyenne des moyennes est de la forme P_k et la suite du problème s'intéresse à trouver les valeurs de k permettant de réaliser ce minimum selon les valeurs de n.

Partie 2 : Étude pour le cas particulier de $n = 4$

Par exemple, pour $\text{E}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, on a $\text{P}_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$, de la moyenne des moyennes $\dfrac{1 + 2 + \dfrac{3+4}{2}}{3} = \dfrac{13}{6}$.

Q1 : Expliciter chacune des partitions P_k de E_4 pour k entier naturel compris entre 1 et 4.

Q2 : Calculer la moyenne des moyennes pour chacune des partitions explicitées à la question précédente.

Q3 : Donner la valeur minimale de la moyenne des moyennes des P_k lorsque k décrit l'ensemble des entiers compris entre 1 et 4.

Partie 3 : Étude pour le cas particulier de $n = 5$

On considère $\text{E}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et on reprend les notations de la partie précédente.

Déterminer la valeur minimale de la moyenne des moyennes des partitions P_k lorsque k décrit l'ensemble des entiers compris entre 1 et 5 et préciser la (ou les) partition(s) pour laquelle (ou lesquelles) cette valeur minimale est réalisée.

Partie 4 : Étude du cas général

Soit n un nombre entier naturel strictement positif et soit k est un entier compris entre 1 et n.

Q1 : Démontrer que l'expression en fonction de n et k de la moyenne des moyennes de P_k est $\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{n}{k}\right)$

Q2 : On considère la fonction f_n définie sur $]0;n]$ par $f_n(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{n}{x}\right)$

- **(a)** Démontrer que la fonction f_n admet un minimum sur $]0;n]$ atteint en $\sqrt{n}$.
- **(b)** Calculer la valeur du minimum de f_n sur $]0;n]$.

Q3 : Dans le cas où $n=9$, $n=10$, $n=11$, $n=12$ et $n=13$, déterminer la (ou les) partition(s) avec la plus petite moyenne des moyennes.

Q4 : On se place dans le cas général où n est un nombre entier naturel non nul.
Déterminer, en fonction de n, l'expression de k pour laquelle la moyenne des moyennes de P_k est minimale lorsque k décrit l'ensemble des entiers compris entre 1 et n selon que :

- **(a)** L'entier naturel non nul n est un carré parfait
- **(b)** L'entier naturel non nul n n'est pas un carré parfait. On pourra, dans ce cas, introduire l'entier naturel non nul m tel que $m<\sqrt{n}<m+1$ et comparer les valeurs de $f_n(m)$ et $f_n(m+1)$ selon que n soit plus grand ou plus petit que $m(m+1)$.

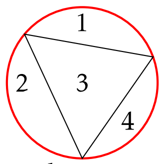
Q5 : Quelles sont les partitions qui rendent minimale la moyenne des moyennes lorsque $n=2024$?

Q6 : Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il y a exactement deux partitions distinctes qui rendent minimale la moyenne des moyennes de leurs sous-ensembles ?

Exercice 3. Régions du disque

Le but du problème est de trouver le maximum de régions que l'on peut former dans un disque avec n points reliés par des cordes.

Par exemple avec 3 points, on peut tracer trois cordes qui délimitent quatre régions du disque.



Dans tout cet exercice, $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O de rayon quelconque, n et k désignent des entiers naturels non nuls.

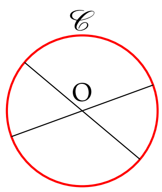
Partie 1 : Échauffement avec des diamètres

Q1 : Combien de régions distinctes peut-on former avec 1 diamètre ?

Q2 : Combien de régions distinctes peut-on former avec 2 diamètres distincts ?
Puis avec 3 diamètres ? 4 diamètres ? 9 diamètres ?

Q3 : Pour tout nombre entier k, on note $z(k)$ le nombre de régions que l'on peut obtenir avec k diamètres.
Justifier que la suite z est une suite arithmétique et préciser sa raison.

Q4 : En déduire l'expression de $z(k)$ en fonction de k.



Partie 2 : Avec des cordes

Soit n un entier naturel non nul.
On considère n points distincts situés sur le cercle $\mathscr{C}$.

Q1 : Au maximum, combien de régions distinctes peuvent être formées avec les cordes reliant les n points sur le cercle lorsque :

(**a**) $n = 2$;

(**b**) $n = 3$;

(**c**) $n = 4$;

(**d**) $n = 5$.

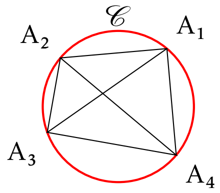


Figure 1

Q2 : On note $Z(n)$ le nombre maximal de régions distinctes qui peuvent être formées avec les cordes reliant deux à deux les n points sur le cercle.
Quelle expression de $Z(n)$ en fonction de n peut-on conjecturer ?

Q3 : Déterminer $Z(6)$.
Que peut-on en déduire concernant la conjecture précédente ?

Q4 : Pour un entier n donné, à quelle condition sur les cordes le nombre de régions est-il maximal ?

Partie 3 : Graphe

En mathématiques, un *graphe* est un ensemble de sommets (ou points) et d'arêtes (ou segments) liant certains couples de sommets.

Si l'on ne tient pas compte du cercle et que l'on ajoute les points d'intersections des cordes, on obtient un graphe.
Par exemple, sur la figure 2 ci-contre, on obtient un graphe constitué de 5 sommets et de 8 arêtes.

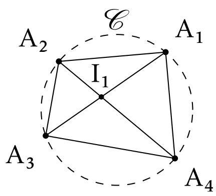


Figure 2

Q1 : En reprenant les figures réalisées dans la partie 2, déterminer le nombre de sommets et d'arêtes dans les graphes correspondant à $n = 3$, $n = 5$ et $n = 6$.

La formule d'Euler (mathématicien suisse, Bâle 1707-Saint-Pétersbourg 1783) est une relation entre le nombre de sommets (noté S), le nombre d'arêtes (noté A) et le nombre de faces (noté F) d'un graphe tel que considéré dans ce problème.
Une face d'un tel graphe est simplement une zone du plan délimitée par des arêtes.
Lorsqu'on compte le nombre de faces de ce type de graphe, il ne faut pas oublier la face extérieure (celle qui est infinie).
La formule d'Euler est : $$S - A + F = 2$$

Q2 : En utilisant la formule d'Euler, déterminer le nombre de faces du graphe de la figure 2.

Q3 : Imaginons que l'on retrace le cercle comme dans la partie 2.
Pour $n = 3$, $n = 5$ et $n = 6$, déterminer le nombre maximal de régions à l'intérieur du disque.

Partie 4 : Vers la formule

On considère n points distincts situés sur le cercle $\mathscr{C}$.

Q1 : Déterminer le nombre de cordes pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.

Q2 : Exprimer ce nombre de cordes en fonction de n.

Q3 : On admet pour la suite que le nombre de points d'intersections entre les cordes (à l'intérieur du disque) est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

On admet aussi que le nombre d'arêtes du graphe correspondant est

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

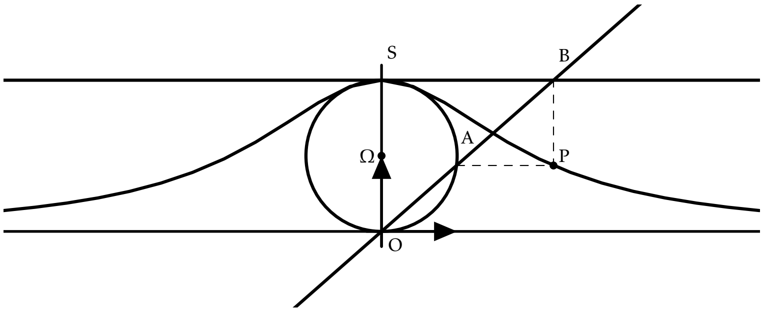
Établir une formule donnant le nombre de faces du graphe correspondant (en retirant le cercle).

Q4 : En déduire une expression du nombre de régions à l'intérieur du cercle en fonction de n.

Q5 : Quel est le nombre maximal de régions à l'intérieur du cercle pour 2024 points.

Corrigé de l'exercice 1 : Sorcière d'Agnesi

Partie 1 : Définition géométrique



Partie 2 : Équation de la courbe d'Agnesi

Q1 : La droite (OA) a pour équation $y = \dfrac{y_A}{x_A}x$ et intercepte $y = d$ en B donc $d = \dfrac{y_A}{x_A}x_B$ or $y_A = y$ et $x = x_B$ donc $xy = x_A d$.

Q2 : D'après la définition d'un cercle, $\Omega A = \dfrac{d}{2}$ donc

$$A \in \mathscr{C} \iff \Omega A^2 = \frac{d^2}{4} \iff x_A^2 + \left(y_A - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} \iff \left(\frac{xy}{d}\right)^2 + y^2 - dy + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4}$$

$$\iff y\left(y\left(\frac{x^2}{d^2}+1\right) - d\right) = \frac{x^2}{d^2}$$

Q3 : $\iff y = 0$ ou $y = \dfrac{d}{\dfrac{x^2}{d^2}+1} \iff y = \dfrac{d^3}{y^2+d^2}$

Q4 : Pour $x = 0$, on $y = d$.

Partie 3 : Étude de la courbe d'Agnesi.

Q1 : $\mathbb{R}$ est centré en 0 et $f(-x) = f(x)$ car $(-x)^2 = x^2$, donc f est paire.

Q2 : f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-2xd^3}{(x^2+d^2)^2}$ qui est du signe de $-x$ car $d > 0$. D'où le tableau des variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f'		+	0	−	
Variations de f		$\nearrow$	d	$\searrow$	

Q3 :

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,28	0,4	0,62	1	1,6	2	1,6	1	0,62	0,4	0,28

Partie 4 : Quelques équations

Q1 : $f(x) = \dfrac{d}{2} \iff 2d^2 = x^2 + d^2 \iff x = d$ ou $x = -d$.

Q2 : $P\left(d; \dfrac{d}{2}\right)$. Donc $B(d;d)$ et comme O, A et B sont alignés, $\widehat{AOS} = 45°$.

Q3 : $f(x) = \dfrac{3d}{4} \iff 3(x^2+d^2) = 4d^2 \iff x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}d$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$. $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d; \dfrac{3d}{4}\right)$. Donc $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d; d\right)$ et comme O, A et B sont alignés, $\widehat{AOS} = \widehat{BOS} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$.

Q4 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'Agnesi en un point d'abscisse a admet pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$. Chercher la valeur de a en laquelle ce coefficient directeur est minimal, revient à déterminer le minimum de la fonction f'.

On cherche donc à étudier le sens de variations de la fonction f'. Comme f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, étudier son sens de variation revient à étudier le signe de f''.

D'après le logiciel de calcul formel (entrée 2), pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, comme le dénominateur est positif et en mettant $2d^3$ en facteur au numérateur, f'' est du signe de $-d^2+3x^2$ qui est du signe de $3>0$ à l'extérieur des racines $-\frac{\sqrt{3}}{3}d$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}d$		$\frac{\sqrt{3}}{3}d$		$+\infty$
Signe de f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f'		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	

Sur $\left[-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{3}d\right]$, $f'(x)=\dfrac{-2xd^3}{(x^2+d^2)^2}>0$ et donc comme $f'\left(\dfrac{d\sqrt{3}}{3}\right)<0$, le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$ est donc atteint pour $x=\dfrac{d\sqrt{3}}{3}$. D'après la question précédente, cette valeur correspond au cas où l'angle $\widehat{AOS}=30°$

Corrigé de l'exercice 2 : Partitions et moyennes

Partie 1 : Étude pour le cas particulier de $n=3$

On donne dans le tableau ci-dessous les partitions de E_3 et calculs des moyennes des moyennes de chacune d'elles :

Liste des partitions de E_3	Valeur de la moyenne des moyennes
$\big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\}$	2
$\big\{\{1\},\{2,3\}\big\}$	1,75
$\big\{\{2\},\{1,3\}\big\}$	2
$\big\{\{3\},\{1,2\}\big\}$	2,25
$\big\{\{1,2,3\}\big\}$	2

Une unique partition rend minimale la moyenne des moyennes des sous-parties : $\big\{\{1\},\{2,3\}\big\}$

Partie 2 : Étude pour le cas particulier de $n=4$

Q1 : Liste des partitions pour $k=1$ à 4 :

$$P_1=\{\{1,2,3,4\}\},\quad P_2=\{\{1\},\{2,3,4\}\},\quad P_3=\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\},\quad P_4=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}.$$

Q2 : Moyenne des moyennes pour chaque partition :

Pour P_1 : $$\frac{1+2+3+4}{4}=2,5.$$

Pour P_2 : $$\frac{1+\frac{2+3+4}{3}}{2}=2.$$

Pour P_3 : $$\frac{1+2+\frac{3+4}{2}}{3}=\frac{13}{6}\approx 2,17.$$

Pour P_4 : $$\frac{1+2+3+4}{4}=2,5.$$

Q3 : La valeur minimale de la moyenne des moyennes des sous-ensembles de E_4 de la forme P_k vaut 2.

Une seule partition réalise cette moyenne des moyennes de l'ensemble des partitions P_k de E_4 minimale : il s'agit de la partition $P_2=\{\{1\},\{2,3,4\}\}$.

Partie 3 : Étude pour le cas particulier de $n = 5$

La liste des partitions de E_4 de la forme P_k pour k entier compris entre 1 et 5 ainsi que la moyennes des moyennes des parties qui les constituent est :

Pour $P_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$: moyenne $= 3$.
Pour $P_2 = \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$: moyenne $= 2,25$.
Pour $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$: moyenne $= \dfrac{7}{3}$.
Pour $P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$: moyenne $= \dfrac{10,5}{4}$.
Pour $P_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$: moyenne $= 3$.

La valeur minimale est $2,25$, réalisée par $P_2 = \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.

Partie 4 : Étude du cas général

Q1 : Expression générale de la moyenne des moyennes des sous-ensembles P_k en fonction de n et k :

Pour une partition P_k : $\dfrac{1}{k}\left(1+2+\cdots+(k-1)+\dfrac{k+(k+1)+\cdots+n}{n-(k-1)}\right) = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{k(k-1)}{2}+\dfrac{n+k}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{n}{k}\right)$

Q2 : **(a)** La fonction f_n est dérivable sur $]0, n]$ comme produit d'une constante par la somme des fonctions identité et inverse, dérivables sur $]0, n]$.

Pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{n}{x^2}\right) = \dfrac{(x-\sqrt{n})(x+\sqrt{n})}{2x^2}$ qui est du signe de $x-\sqrt{n}$ car les autres facteurs sont positifs sur $\mathbb{R}_+^*$.

f_n est décroissante sur $]0; \sqrt{n}]$ et croissante sur $[\sqrt{n}; n]$ atteint un minimum en $x = \sqrt{n}$

(b) La valeur de ce minimum est $f_n(\sqrt{n}) = \sqrt{n}$.

Q3 :
- Pour $n = 9$. L'entier $n = 9$ étant un carré parfait, la valeur minimale de l'ensemble des moyennes de moyennes de sous-ensembles est obtenue pour P_3, avec $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$ et vaut

$$\frac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9}{7}}{3} = 3.$$

- Pour $n = 10$. Comme $9 < 10 < 16$ et que $10 < 3 \times 4$, le minimum est pour $m = 3$, donc réalisé pour la partition $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$ et vaut

$$\frac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9+10}{8}}{3} = \frac{19}{6}.$$

- Pour $n = 11$. Comme $9 < 11 < 16$ et que $11 < 3 \times 4$, le minimum est pour $m = 3$, donc réalisé pour la partition $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}\}$ et vaut

$$\frac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9+10+11}{9}}{3} = \frac{10}{3}.$$

- Pour $n = 12$. Comme $9 < 12 < 16$ et que $12 = 3 \times 4$, le minimum est pour $m = 3$ et $m = 4$, donc réalisé pour deux partitions $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}$ et $P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}$ et vaut

$$\frac{1+2+3+\frac{4+5+6+7+8+9+10+11+12}{9}}{4} = \frac{7}{2}.$$

- Pour $n = 13$. Comme $9 < 13 < 16$ et que $13 > 3 \times 4$, le minimum est pour $m = 4$, donc réalisé pour la partition $P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}\}$ et vaut

$$\frac{1+2+3+\frac{4+5+6+7+8+9+10+11+12+13}{10}}{4} = 3,625.$$

Q4 : D'après la question 2, parmi toutes les partitions P_k de E_n, celles associées à la valeur minimale de la valeur des moyennes des moyennes des sous-ensembles sont déterminées par la valeur de $\sqrt{n}$.

(a) Ainsi, si n est un carré parfait, $S_{\sqrt{n}} = \left\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{\sqrt{n}-1\}, \{\sqrt{n}, \sqrt{n}+1, \ldots, n\},\right\}$ est la partition qui rend minimale la valeur des moyennes de moyennes des sous-ensembles.

(b) Sinon, il existe m entier tel que $m < \sqrt{n} < m+1$ et la comparaison des valeurs de $f_n(m)$ et $f_n(m+1)$ va permettre de déterminer la partition cherchée.

$f_n(m) - f_n(m+1) = \dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{n}{m}\right) - \dfrac{1}{2}\left(m+1+\dfrac{n}{m+1}\right) = \dfrac{n-m(m+1)}{2m(m+1)}$ du signe de $n - m(m+1)$.

Le minimum est donc $f_n(m)$ si $n < m(m+1)$ et $f_n(m+1)$ sinon.

Q5 : L'entier $n = 2024$ n'est pas un carré parfait et $44 < \sqrt{2024} < 45$ et $2024 > 44 \times 45 = 1980$.
D'après la question, précédente, le minimum est pour $m = 45$ et est réalisé uniquement par la partition P_{45} de E_{2024}.

Q6 : Il existe exactement deux partitions qui permettent à $M_2(P)$ de réaliser son minimum pour les valeurs de n qui sont le produit de deux entiers consécutifs.
En effet, lorsque $\sqrt{n}$ n'est pas entier et qu'il est encadré par les entiers m et $m+1$, on peut hésiter entre P_m et P_{m+1} pour partition optimale et elles conviennent toutes les deux dès lors que $\frac{1}{2}\left(k+\frac{n}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(k+1+\frac{n}{k+1}\right)$.
La résolution de cette équation d'inconnue n permet d'obtenir $n = k(k+1)$.

Corrigé de l'exercice 3 : Régions du disque

Partie 1 : Échauffement avec des diamètres

Q1 : On peut former 2 régions avec 1 diamètre.

Q2 : On peut former 4 régions avec 2 diamètres, 6 régions avec 3 diamètres, 8 régions avec 4 diamètres,

Q3 : $z(k+1) = z(k) + 2$ car un diamètre ajoute 2 régions. Donc la suite z est arithmétique de raison 2.

Q4 : Pour tout $k \geqslant 1$, $z(k) = 2(k-1) + 2 = 2k$.

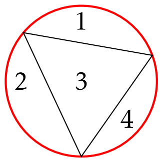
Partie 2 : Avec des cordes

Q1 : **(a)** $n = 2$: 2 régions ;

(b) $n = 3$: 4 régions ;

(c) $n = 4$: 8 régions ;

(d) $n = 5$: 16 régions ;



$n = 3$

Q2 : On peut conjecturer que $Z(n) = 2^{n-1}$

Q3 : $Z(6) = 31$. La conjecture est fausse.

Q4 : Il faut que 3 cordes ne sont pas concourantes en un même point.

Partie 3 : Graphe

Q1 : Pour $n = 3$: on a 3 sommets et 3 arêtes ;
Pour $n = 5$: on a 10 sommets et 20 arêtes ;
Pour $n = 6$: on a 21 sommets et 45 arêtes ;

Q2 : Pour la figure 2 : $S = 5$; $A = 8$. Avec la formule, on retrouve $F = 5$.

Q3 : Pour $n = 3$: on a $S = 3$ et $A = 3$; donc $F = 2 - 3 + 3 = 2$, donc il y a 1 région intérieure (car on enlève la face infinie) et 3 régions extérieures (avec un bord comme cercle), donc on le nombre maximal de régions est 4.
Pour $n = 5$: on a $S = 10$ et $A = 20$; donc $F = 12$ donc il y a 11 régions intérieures (car on enlève la face infinie) et 5 régions extérieures (avec un bord comme cercle), donc on le nombre maximal de régions est 16.
Pour $n = 6$: on a $S = 21$ et $A = 45$; donc $F = 26$ donc il y a 25 régions intérieures (car on enlève la face infinie) et 6 régions extérieures (avec un bord comme cercle), donc on le nombre maximal de régions est 31.

Partie 4 : Vers la formule

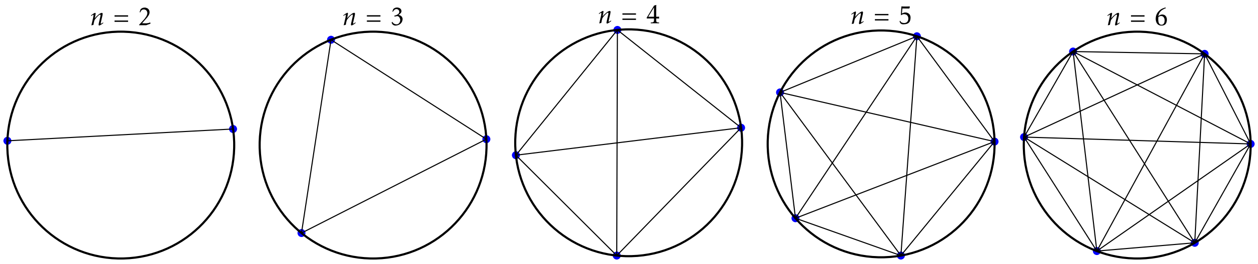
Q1 : Pour $n = 3$, on a 3 cordes ;
Pour $n = 4$, on a 3+2+1=6 cordes ;
Pour $n = 5$, on a 4+3+2+1=10 cordes.

Q2 : $C(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Q3 : $F = 2 + A - S = 2 + \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - n$

Q4 : Donc le nombre de faces intérieurs est (on enlève la face extérieure) : $1 + \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - n$
Donc le nombre maximal de régions est (on rajoute les n régions avec un bord sur le cercle) :
$$1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Q5 : Pour 2024 points, le nombre maximal de régions est donc 697178345403.


$n = 2$
$n = 3$
$n = 4$
$n = 5$
$n = 6$