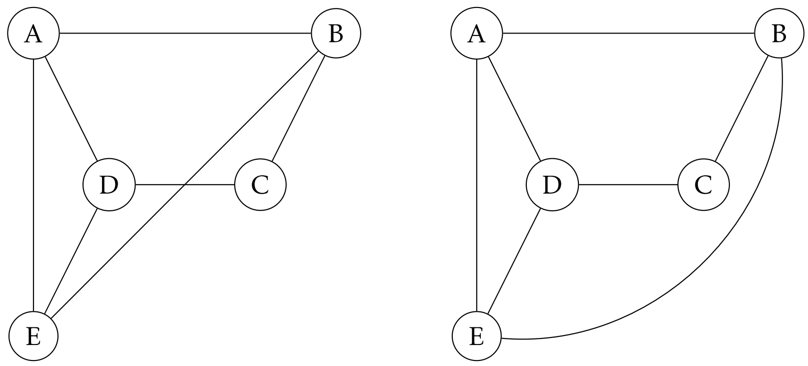
Exercice 1. Un problème de croisements

Au XX$^{\text{e}}$ siècle en Europe, dans certaines mines, on conservait le minerai dans différents entrepôts de stockage en attendant de le vendre.
Les charges à transporter d'un entrepôt à un autre étant très lourdes, on les déplaçait dans des wagonnets qui roulaient sur des rails.
À cette époque, la technologie permettait le croisement de deux rails mais pas le croisement de trois rails en une même intersection.
Dans la modélisation de cette situation, on suppose que l'on peut toujours aller d'un entrepôt à un autre. De plus, deux entrepôts reliés par un chemin direct par des rails ne le sont qu'une seule fois.

Un exemple de deux modélisations possibles pour un site comportant 5 entrepôts :
Chaque entrepôt est représenté par un *sommet* (nommés ici A, B, C, D et E) et les rails les reliant sont représentés par une *arête*.
Un *graphe* est un ensemble de sommets et d'arêtes.
On appelle s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes.
On a tracé ci-dessous deux représentations possibles pour un même graphe.



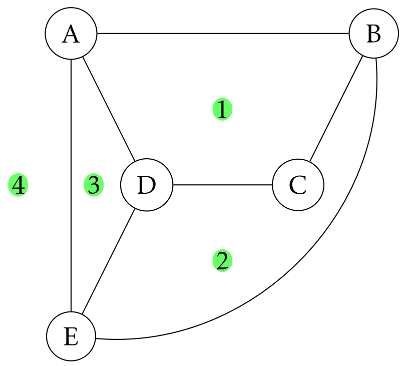
Ce graphe a sept arêtes, $a = 7$ et cinq sommets, $s = 5$.

Partie 1 - Sans croisement de rails

Dans la mine, les croisements posaient problème car ils provoquaient des déraillements qui faisaient tomber les charges, ce qui donnait du travail supplémentaire et faisait perdre du temps.
Dans cette partie, on étudie les situations dans lesquelles on peut éviter les croisements de rails.
On définit un *graphe planaire* comme un graphe qui a une représentation dans le plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

Dans ce cas, les arêtes du graphe découpent le plan en plusieurs régions.

Par exemple, le graphe ci-contre est planaire, il découpe le plan en 4 régions. On notera $r = 4$.

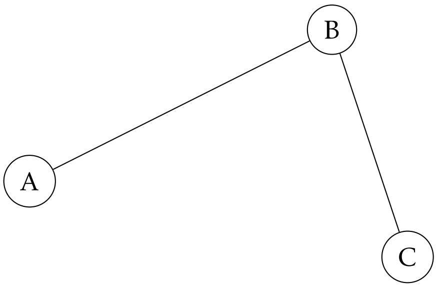


Q1 : Tracer des graphes planaires à 1 sommet, à 2 sommets, à 3 sommets, à 4 sommets et à 5 sommets.

Q2 : Le but de cette question est de prouver que tout graphe planaire vérifie la relation d'Euler :

$$s + r - a = 2.$$

(a) Vérifier que le graphe à 1 sommet vérifie la relation d'Euler.
(b) On considère le graphe planaire suivant qui vérifie la relation d'Euler.



Si on ajoute une arête, deux situations se présentent.

Sur votre copie, faire une illustration de chacune de ces situations puis vérifier que chacun des graphes planaires obtenus satisfait la relation d'Euler.

(c) Conclure que la relation d'Euler est vraie pour tout graphe planaire.

Q3 : Justifier que pour tout graphe planaire ayant 3 sommets ou plus, $r \leqslant \frac{2}{3}a$.

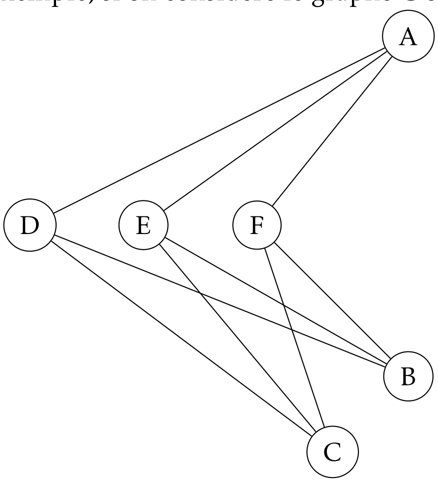
Q4 : En déduire que pour tout graphe planaire ayant plus de 3 sommets,

$$2 - s + \frac{a}{3} \leqslant 0 \qquad (relation(2))$$

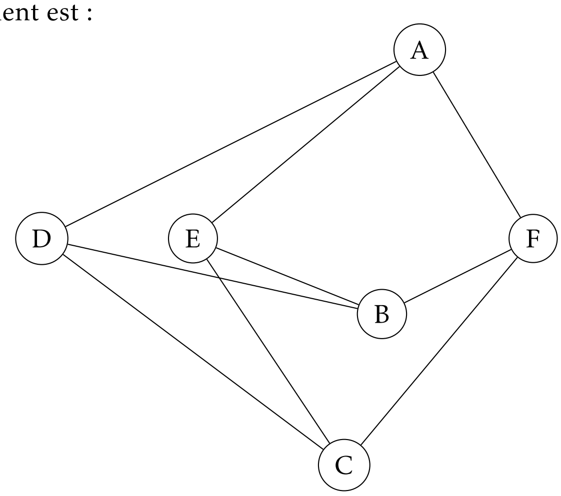
Partie 2 : Avec croisement de rails

Le but de cette partie est d'améliorer la productivité en minimisant le nombre de croisements.
On appellera *nombre de croisements* d'un graphe G, noté $Cr(\mathrm{G})$, le nombre minimum de points d'intersection des arêtes dans toute représentation du graphe.
Ainsi, dans cette partie, les graphes ne sont pas nécessairement planaires.

Par exemple, si on considère le graphe G suivant :



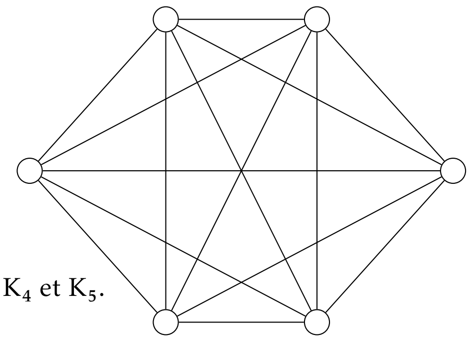
Une représentation de G avec un minimum de croisement est :



Donc $Cr(\mathrm{G}) = 1$.

Lorsque tous les entrepôts sont reliés directement entre eux, le graphe représentant la situation s'appelle un *graphe complet*.
Pour n un entier naturel non nul, noté $n \in \mathbb{N}^*$, un graphe complet à n sommets est donc un graphe dont chaque sommet est relié à tous les autres. On le note K_n.

Ci-contre, on a représenté le graphe complet K_6.



Q1 : **(a)** Tracer une représentation des graphes complets K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5.

(b) Déterminer $Cr(\mathrm{K}_1)$, $Cr(\mathrm{K}_2)$, $Cr(\mathrm{K}_3)$ et $Cr(\mathrm{K}_4)$.

Q2 : **(a)** En utilisant la *relation (2)*, prouver que le graphe complet K_5 n'est pas un graphe planaire.

(b) Déterminer $Cr(\mathrm{K}_5)$ (vous pourrez vous aider d'une représentation du graphe complet K_5).

Q3 : Considérons le graphe complet à n sommets K_n, $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire n est un entier naturel non nul.

(a) Déterminer en justifiant le nombre d'arêtes du graphe complet K_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) On représente le graphe complet K_n, $n \in \mathbb{N}^*$, avec un nombre minimum de croisements.
On construit un nouveau graphe planaire G_n, $n \in \mathbb{N}^*$, de la manière suivante :

- ses sommets sont ceux de K_n auxquels on ajoute un sommet pour chaque croisement de K_n ;
- les arêtes de K_n sans croisement sont conservées ;
- les arêtes de K_n qui se croisent sont coupées à chaque croisement.

Quel est le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du graphe planaire G_n ,$n \in \mathbb{N}^*$?

(c) Appliquer la relation (2) au graphe planaire G_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et justifier que

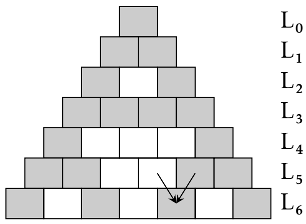
$$Cr(K_n) \geqslant \frac{n^2 - 7n + 12}{2}.$$

(d) Déterminer $Cr(K_6)$ et tracer une représentation de K_6 avec $Cr(K_6)$ croisements.

(e) Pouvez-vous déterminer avec certitude $Cr(K_7)$?
Tracer une représentation de K_7 qui permet d'approcher au mieux $Cr(K_7)$.

Exercice 2. Des pyramides de cellules grises

On considère une pyramide infinie construite en superposant des cellules en quinconce selon les règles suivantes :



- La ligne du haut possède une seule cellule grise.
- Chaque ligne suivante possède une cellule de plus que celle située juste au dessus.
- Les cellules aux extrémités des lignes sont grises.
- Une cellule surplombée par deux cellules de même couleur est blanche ; sinon elle est grise.

Notations :
La première ligne est notée L_0, la seconde L_1 et ainsi de suite. On numérote aussi les cellules de gauche à droite dans une ligne : $L_n[0]$ est la couleur de la première cellule, suivie de $L_n[1]$jusqu'à $L_n[n]$.

Exemples :
$L_0[0]$ = gris (la cellule au sommet est grise). $L_6[4]$ = gris car $L_5[3] \neq L_5[4]$; une interprétation de ce résultat est représentée dans la pyramide ci-dessus par deux flèches qui vont de la ligne L_5 à la ligne L_6.

Partie 1 : Premiers exemples

Q1 : **(a)** Sans justifier, compléter jusqu'à la ligne L_{10} la pyramide de l'annexe 1 avec les couleurs suivant les règles précédentes.

(b) Donner la valeur de $L_9[4]$. Justifier en entourant la cellule correspondante dans l'annexe 1.

Q2 : Les trois premières lignes entièrement grises de la pyramide sont L_0, L_1 et L_3. Déterminer le plus petit entier $n \geq 5$ tel que L_n soit entièrement grise. Aucune justification n'est attendue.

Q1 : Dans la fonction ci-contre, L est la liste des couleurs d'une ligne L_n, en représentant le blanc par 0 et le gris par 1.
La deuxième ligne de l'algorithme calcule n à partir du nombre len(L) de cellules dans la liste, tandis que la troisième ligne prépare une liste S avec un emplacement de plus pour représenter L_{n+1}.
Enfin, la quatrième ligne remplit S[0] et S[n+1] avec le nombre 1 puisque les extrémités de L_{n+1} sont grises.
Sur l'annexe 2, compléter l'algorithme pour que la fonction renvoie la liste S des couleurs de la ligne L_{n+1}.

```
def suivante(L):
    n = len(L) - 1
    S = [None] * (n+2)
    S[0] = S[n+1] = 1
    for k in range(n):
        if L[...] == L[...]:
            S[...] = ...
        else:
            ...
    return ...
```

Partie 2 : Couleur et parité

Q1 : On obtient L_6 en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_3. On obtient L_5 en dédoublant chaque cellule de L_2.
Ces constructions se retrouvent ailleurs dans la pyramide. Donner deux exemples de chaque cas.

Q2 : Soit n un entier quelconque tel que $n \geqslant 1$. On peut représenter L_n =

c_0	c_1	c_2	$\cdots\cdots$	c_{n-1}	c_n

où c_k est la couleur de la cellule correspondante : $c_k = L_n[k]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Dans cette question on suppose que L_{2n} s'obtient en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_n.

(a) Représenter L_{2n} et L_{2n+1} avec les bonnes informationsde couleur.

(b) Démontrer que L_{2n+1} s'obtient en dédoublant chaque cellule de L_n.

(c) Démontrer que L_{2n+2} s'obtient en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_{n+1}.

Q3 : Démontrer que pour tout entier naturel n, la ligne L_{2n} s'obtient en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_n et que la ligneL_{2n+1} s'obtient en dédoublant chaque cellule de L_n.

On a ainsi démontré que pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$L_{2n}[2k] = L_n[k] \quad L_{2n}[2k+1] = \text{blanc}$$

$$L_{2n+1}[2k] = L_n[k] \quad L_{2n+1}[2k+1] = L_n[k]$$

.

Partie 3 : Écriture binaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique décomposition

$$n = n_a \times 2^a + n_{a-1} \times 2^{a-1} + \cdots + n_3 \times 2^3 + n_2 \times 2^2 + n_1 \times 2^1 + n_0$$

avec $n_i \in \{0;1\}$ pour tout i entier naturel entre 0 et a. On l'appelle **écriture binaire** de n et on la note $(n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0))_2$.
Par exemple, $5 = (101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, $32 = (10000)_2 = 2^4$ et $31 = (1111)_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

Q1 : **(a)** Donner les écritures binaires des entiers de 0 à 6 inclus.

(b) Donner l'écriture décimale (habituelle) des entiers $(10101)_2$ et $(1010)_2$.

Si n et k sont deux nombres entiers naturels on dit que n **domine** k si chaque chiffre de l'écriture binaire de n est supérieur ou égal au chiffre de même position dans l'écriture binaire de k.

Q2 : **(a)** Déterminer si 5 domine 3 en justifiant.

(b) Compléter sans justifier le tableau de l'annexe 3.

(c) Conjecturer une règle permettant de déterminer la couleur $L_n[k]$ pour tous les entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Notons $n = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$ et $k = (k_b k_{b-1} \dots k_3 k_2 k_1 k_0)_2$ les écritures binaires de n et k. On considère que $k_i = 0$ si $b < i \leqslant a$ ce qui revient à ajouter des chiffres zéro à gauche de l'écriture de k pour qu'il ait autant de chiffres que n. On conservera ces notations dans tout le reste de l'exercice.

Q3 : Démontrer que $L_n[k] = \text{gris}$ si et seulement si n domine k.

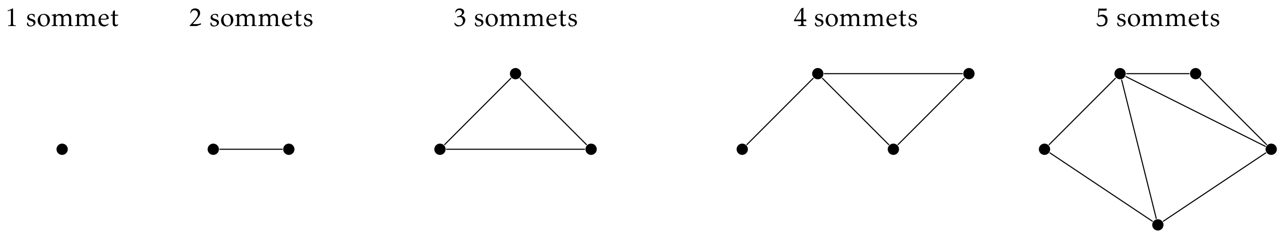
Q4 : **(a)** On souhaite savoir quelles lignes de la pyramide sont entièrement grises. Conjecturer une propriété caractéristique et démontrer cette conjecture.

(b) On souhaite savoir quelles lignes de la pyramide sont entièrement blanches à l'exception des cellules des extrémités. Conjecturer une propriété caractéristique et démontrer cette conjecture.

Q5 : Démontrer que le nombre de cellules grises de la ligne L_n est 2^s où s est le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.

Corrigé de l'exercice 1 : Un problème de croisements

Partie 1 - Sans croisement de rails

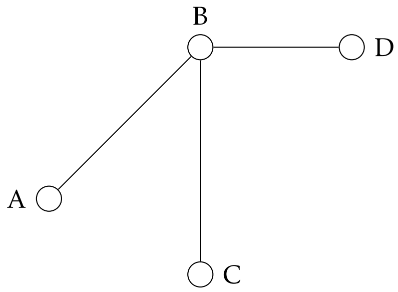


Q1 :

Q2 : **(a)** Le graphe a 1 sommet, 0 arête et 1 région, et la relation $1 - 0 + 1 = 2$ est bien vérifiée.

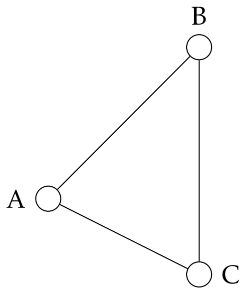
(b) *Situation 1 : le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête.*

Dans ce cas, $s + r - a = 4 + 1 - 3 = 2$, la relation d'Euler est vérifiée.



Situation 2 : le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ajoute une arête et une région.

Dans ce cas, $s + r - a = 3 + 2 - 3 = 2$, la relation d'Euler est vérifiée.



(c) Tout graphe planaire peut être obtenu en partant du graphe avec un seul sommet et aucune arête et en rajoutant des arêtes une par une, partant d'un sommet déjà existant et arrivant vers un sommet soit déjà existant, soit nouveau.
Deux cas de figure se présentent lorsqu'on rajoute une arête.

- ▷ Si le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête. En rajoutant cette arête et ce sommet, le nombre de régions reste inchangé (puisque la nouvelle arête ne coupe aucune face en deux). s devient $(s+1)$ et a devient $(a+1)$, la valeur de $s + r - a$ ne change pas.
- ▷ Si le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ne rajoute aucun sommet. En revanche, la nouvelle arête coupe toujours une région en deux. Dans ce cas, a devient $(a+1)$ et r devient $(r+1)$, ce qui laisse à nouveau la valeur de $s + r - a$ inchangée.

Q3 : Notons r le nombre de régions d'un graphe ($r \in \mathbb{N}^*$), alors $r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} r_i$ en numérotant de 1 à r les r régions du graphe (on a alors pour tout entier i entre 1 et r, $r_i = 1$).
Chaque région est délimitée par au moins 3 arêtes donc pour tout entier i entre 1 et p :

$$3r_i \leqslant a_i$$

où a_i est le nombre d'arêtes délimitant la i-ème région.
Notons a le nombre total d'arêtes du graphe, chaque arête étant commune à deux régions, on a alors :

$$a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} a_i$$

Ainsi :

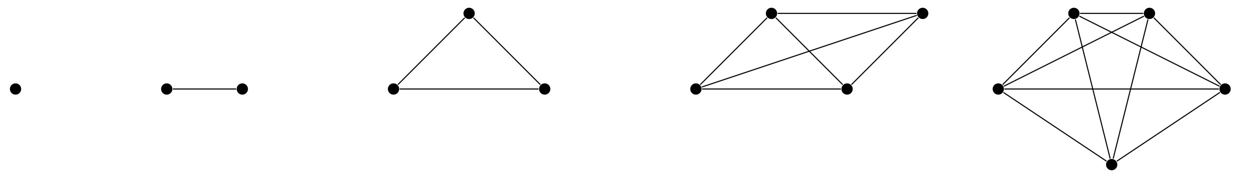
$$r = \sum_{i=1}^{r} r_i \leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{r} a_i = \frac{2}{3}a$$

Q4 : En injectant le résultat du 3- dans la formule d'Euler, on obtient :

$$2 = s + r - a \leq s - \frac{1}{3}a \quad \text{donc} \quad 2 - s + \frac{a}{3} \leq 0$$

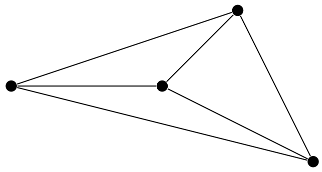
Partie 2 : Avec croisement de rails

1 sommet | 2 sommets | 3 sommets | 4 sommets | 5 sommets



Q1 : **(a)** Voir ci-dessus.

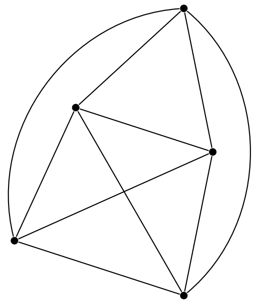
(b) On peut affirmer que $Cr(K_1) = Cr(K_2) = Cr(K_3) = Cr(K_4) = 0$



Q2 :

(a) K_5 possède 5 sommets et 10 arêtes, $2 - s + \frac{a}{3} = -3 + \frac{10}{3} > 0$
Si un graphe est planaire, il vérifie la relation (2).
Par contraposée, on déduit que K_5 n'est pas planaire.

(b) Voici une représentation de K_5 avec un croisement donc $Cr(K_5) \leq 1$
D'après (a) comme K_5 n'est pas planaire, $Cr(K_5) \geq 1$
Par double inégalité, on en déduit que $Cr(K_5) = 1$.



Q3 : **(a)** Chacun des n sommets du graphe est relié aux $(n-1)$ autres et chaque arête relie deux sommets donc le graphe complet d'ordre n compte $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

(b) Les sommets de G_n sont les sommets de K_n auxquels on ajoute le nombre de croisements : il y en a donc $n + Cr(K_n)$.

Le nombre d'arêtes de G_n est $\frac{n(n-1)}{2} + 2Cr(K_n)$.

(c) G_n est un graphe planaire, on peut lui appliquer la relation (2) :

$$2 - n - Cr(K_n) + \frac{1}{3}\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2Cr(K_n)\right) \leqslant 0 \Rightarrow 2 - n + \frac{1}{6}n(n-1) \leqslant \frac{1}{3}Cr(K_n)$$

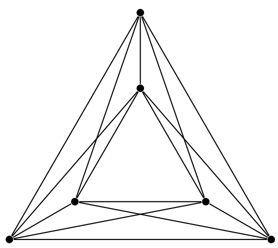
$$\Leftrightarrow 6 - 3n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leqslant Cr(K_n)$$

Et donc $Cr(K_n) \geqslant \frac{n^2 - 7n + 12}{2}$.

(d) On applique l'inégalité de la question 4 dans le cas où $n = 6$,

$$Cr(K_6) \geqslant \frac{36 - 42 + 12}{2} = 3$$

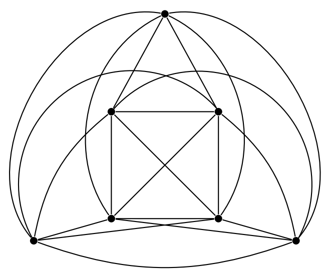
Or $Cr(K_6) \leqslant 3$ d'après la représentation graphique ci-contre
Par double inégalité, $Cr(K_6) = 3$



(e) On applique l'inégalité de la question 4 dans le cas où $n = 6$,

$$Cr(K_7) \geqslant \frac{49 - 49 + 12}{2} = 6$$

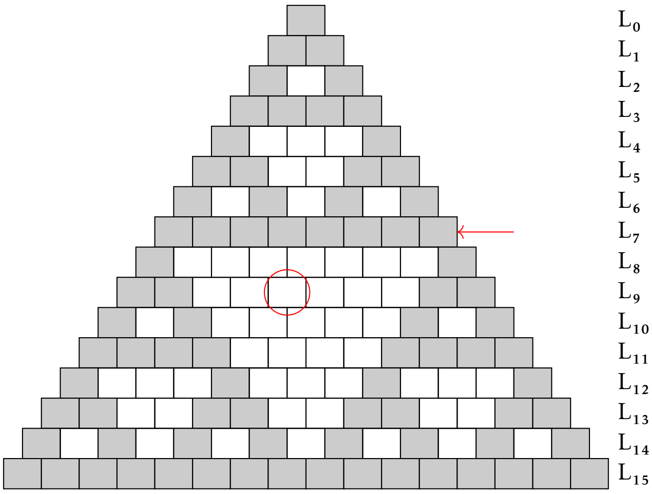
Par représentation du graphe, on trouve au mieux $Cr(K_7) \leqslant 9$ et on ne peut donc rien affirmer avec certitude



Corrigé de l'exercice 2 : Des pyramides de cellules grises

Premiers exemples

Q1 : **(a)**



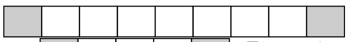
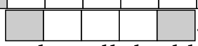
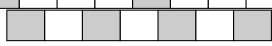
(b) L_94 = blanc.

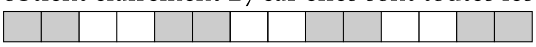
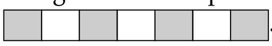
Q2 : Le plus petit entier $n \geqslant 5$ tel que L_n est totalement grise est $n = 7$.

Q3 :

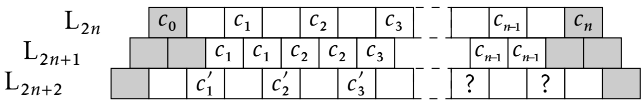
```
def suivante(L):
    n = len(L) - 1
    S = [None] * (n+2)
    S[0] = S[n+1] = 1
    for k in range(n):
        if L[k] == L[k+1]:
            S[k+1] = 0
        else:
            S[k+1] = 1
    return S
```

Couleur et parité

Q4 : L_8 =  peut s'obtenir en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_4 = . De même on obtient L_{12} =  peut en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_6 = .

En dessinant deux fois de suite chaque cellule de L_3 on obtient clairement L_7 car elles sont toutes les deux entièrement grises et les longueurs correspondent. L_{13} =  est le dédoublement de L_6 = .

Q5 : **(a)**



(b) L'hypothèse de la question se traduit par la représentation de L_{2n} ci-dessus (on a intercalé des cellules blanches).

Il est alors clair d'après les règles de construction que $L_{2n+1}[0] = L_{2n+1}[1] = \text{gris} = L_{2n}[0] = c_0$; de même pour les deux dernières cellules de L_{2n+1}.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, puisque $L_{2n}[2k-1]$ = blanc alors $L_{2n+1}[2k]$ = blanc si et seulement si c_k = blanc ce qui montre que $L_{2n+1}[2k] = c_k$. De la même façon $L_{2n}[2k+1]$ = blanc donc $L_{2n+1}[2k+1] = c_k$.

En définitive on a bien démontré que L_{2n+1} est telle que représentée avec les cellules de couleur c_k dédoublées.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. D'après la question précédente $L_{2n+1}[2k] = L_{2n+1}[2k+1] = c_k$ donc la règle de propagation donne $L_{2n+2}[2k+1]$ = blanc.

D'autre part $c'_k = L_{2n+2}[2k]$ s'obtient avec les règles de propagation en comparant c_{k-1} et c_k qui sont des cases consécutives de L_n. Ainsi $c'_k = L_{n+1}[k]$.

En définitive L_{2n+2} s'obtient bien en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_{n+1}.

Q6 : La propriété est vraie pour les petites valeurs de n, en particulier pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai pour $n \geq 0$. D'après la question précédente il est alors vrai pour $n+1$. Par récurrence le résultat est donc vrai pour tout n.

Écriture binaire

Q7 : **(a)** $0 = (0)_2 \quad 1 = (1)_2 \quad 2 = (10)_2 \quad 3 = (11)_2 \quad 4 = (100)_2 \quad 5 = (101)_2 \quad 6 = (110)_2$

(b) $(10101)_2 = 21$, $(1010)_2 = 10$.

Q8 : **(a)** $\begin{array}{l} 5 = (\ 1 \ \ 0 \ \ 1\ )_2 \\ \quad\ \ \ \vee \ \ \wedge \ \ \vee \\ 3 = (\ 0 \ \ 1 \ \ 1\ )_2 \end{array}$ donc 5 ne domine pas 3 à cause du deuxième chiffre.

(b)

n	1	5	5	6	6	6
k	0	1	3	4	3	2
Écriture binaire de n	$(1)_2$	$(101)_2$	$(101)_2$	$(110)_2$	$(110)_2$	$(110)_2$
Écriture binaire de k	$(0)_2$	$(001)_2$	$(011)_2$	$(100)_2$	$(011)_2$	$(010)_2$
n domine k	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai
$\mathrm{L}_n k$	gris	gris	blanc	gris	blanc	gris

(c) On conjecture que n domine $k \iff \mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$.

Q9 : Procédons par récurrence sur le nombre a de chiffres binaires de n : définissons $\mathcal{P}(a)$ la propriété « pour tous entiers naturels n et k pouvant s'écrire avec a chiffres binaires et tels que $k \leqslant n$, $\mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$ si et seulement si n domine k ». Si $a = 1$, les seuls cas à regarder sont $\mathrm{L}_0[0] = \mathrm{L}_1[0] = \mathrm{L}_1[1] = \text{gris}$ qui confirment bien $\mathcal{P}(1)$.

Supposons $\mathcal{P}(a)$, et démontrons $\mathcal{P}(a+1)$. Soient n et k pouvant s'écrire avec $a+1$ chiffres, et $k \leqslant n$. Avec les notations proposées, on a $n = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$ et $k = (k_a k_{a-1} \dots k_3 k_2 k_1 k_0)_2$. Posons $n' = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1)_2$ et $k' = (k_a k_{a-1} \dots k_3 k_2 k_1)_2$. Alors $n = 2n' + n_0$ et $k = 2k' + k_0$, où n' et k' peuvent s'écrire avec a chiffres, et bien entendu $k' \leqslant n'$.

Si pour tout i, $n_i \geqslant k_i$, alors $n_0 \geqslant k_0$ et d'après [$\ast$] $\mathrm{L}_n[k] = \mathrm{L}_{2n'+n_0}[2k'+k_0] = \mathrm{L}_{n'}[k'] = \text{gris}$ en utilisant $\mathcal{P}(a)$.

Si il existe $0 \leqslant i \leqslant a$ tel que $n_i < k_i$, alors ou bien $n_0 < k_0$ et d'après [$\ast$] $\mathrm{L}_n[k] = \text{blanc}$, ou bien $n_0 \geq k_0$ et $i \geqslant 1$. Mais alors $\mathrm{L}_n[k] = \mathrm{L}_{n'}[k'] = \text{blanc}$ en appliquant $\mathcal{P}(a)$.

Dans tous les cas, $\mathcal{P}(a) \implies \mathcal{P}(a+1)$ et puisque $\mathcal{P}(0)$ la propriété est démontrée.

Q10 : **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrivant avec a chiffres binaires. Si pour tout $k \leqslant n$, $\mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$, alors en particulier $\mathrm{L}_n[2^i] = \text{gris}$ donc nécessairement $n_i \geqslant 1$, et ce dès que $2^i \leqslant n$. En définitive, $\forall 0 \leqslant i \leqslant a$, $n_i = 1$: tous les chiffres de n sont des 1. Ainsi $n = 2^a - 1$.

Réciproquement, si $n = 2^a - 1$ alors tous ses chiffres sont des 1 et la propriété de la question **??** est facilement vérifiée pour tout k : la ligne $\mathrm{L}(n)$ ne contient que des cellules grises.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrivant avec a chiffres binaires. Si pour tout $0 < k < n$, $\mathrm{L}_n[k] = \text{blanc}$, alors en particulier $\mathrm{L}_n[2^i] = \text{blanc}$. Or tous les chiffres de 2^i sont nuls sauf k_i, donc c'est nécessairement celui-là qui est supérieur strictement à celui de n : $n_i < k_i = 1$, soit $n_i = 0$ et ce dès que $2^i < n$. En définitive, $\forall 0 \leqslant i < a$, $n_i = 0$: tous les chiffres de n sont des 0, sauf celui le plus à gauche. Ainsi $n = 2^{a-1}$.

Réciproquement, si $n = 2^{a-1}$, alors tous ses chiffres sauf le plus à gauche sont nuls. Si $k = 0$ tous ses chiffres sont nuls et l'on retrouve bien $\mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$. Si $k = n$ les chiffres de k sont ceux de n et ne leur sont pas supérieurs ; ainsi $\mathrm{L}_n[n] = \text{gris}$. Si $0 < k < n$, il existe un chiffre de k non nul, et ce chiffre est dans la même position qu'un chiffre nul de n (car $k \neq n$), donc $\mathrm{L}_n[k] = \text{blanc}$ d'après la propriété de la question 9.

En définitive, les lignes entièrement blanches exceptés les extrémités sont les lignes $\mathrm{L}(2^{a-1})$.

Q11 : Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$ si et seulement si l'écriture binaire de k contient des zéros aux mêmes positions que ceux de l'écriture binaire de n. Les autres chiffres binaires de k peuvent prendre n'importe quelle valeur.

En notant s le nombre de chiffres 1 dans l'écriture binaire de n on obtient tous les k tels que $\mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$ en considérant toutes les combinaisons de 0 et 1 pour les s chiffres « libres » et en plaçant des 0 sur les autres chiffres.

Il y a ainsi 2^s nombres k tels que $\mathrm{L}_n[k] = \text{gris}$ donc 2^s cellules grises dans $\mathrm{L}(n)$. (s est aussi la somme des chiffres binaires de n).

Supplément : De moins en moins de cellules grises

Q1 : $\mathrm{M}(1) = \mathrm{E}(1) = 2$; $\mathrm{M}(2) = 6$ et $\mathrm{E}(2) = 7$.

Q2 : **(a)** L'écriture binaire de $2n$ est celle de n avec un 0 ajouté tout à droite. Ainsi les deux écritures ont le même nombre s de chiffres 1 et $\mathrm{I}(2n) = \mathrm{I}(n)$.

L'écriture binaire de $2n+1$ contient exactement un chiffre 1 de plus donc $\mathrm{I}(2n+1) = 2^{s+1} = 2 \times 2^s = 2\mathrm{I}(n)$.

(b) $\mathrm{M}(r) = \mathrm{I}(2^{r-1}) + \mathrm{I}(2^{r-1}+1) + \dots + \mathrm{I}(n) + \dots + \mathrm{I}(2^r - 1)$. $\mathrm{M}(r+1) = \mathrm{I}(2^r) + \mathrm{I}(2^r+1) + \dots + \mathrm{I}(2n) + \mathrm{I}(2n+1) + \dots + \mathrm{I}(2^{r+1} - 1)$.

On peut grouper toutes les lignes intervenant dans $\mathrm{M}(r+1)$ deux par deux avec $\mathrm{I}(2^r) + \mathrm{I}(2^r + 1) = \mathrm{I}(2 \times 2^{r-1}) + \mathrm{I}(2 \times 2^{r-1} + 1) = \mathrm{I}(2^{r-1}) + 2\mathrm{I}(2^{r-1}) = 3\mathrm{I}(2^{r-1})$ et $\mathrm{I}(2n) + \mathrm{I}(2n+1) = \mathrm{I}(n) + 2\mathrm{I}(n) = 3\mathrm{I}(n)$.

En sommant toutes ces égalités on obtient $\mathrm{M}(r+1) = 3\mathrm{M}(r)$.

Q3 : **(a)** Notons $K(n) = n+1$ le nombre d'entiers dans la ligne $L(n)$. Alors $K(2n)+K(2n+1) = 2n+1+2n+2 = 4n+3 = 4K(n)-1 < 4K(n)$.

Si $n \geqslant 1$, $K(n) \geqslant 2$ donc $\frac{1}{2}K(n) - 1 \geqslant 0$ et ainsi $4K(n) - 1 \geqslant \frac{7}{2}K(n)$.

En définitive, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{7}{2}K(n) \leqslant K(2n)+K(2n+1) < 4K(n)$. En groupant deux à deux les termes dans $E(r+1)$ comme dans la question précédente et en sommant les inégalités on obtient aisément $\frac{7}{2}E(r) \leqslant E(r+1) < 4E(r)$.

(b) $\frac{1}{4E(r)} < \frac{1}{E(r+1)} \leqslant \frac{2}{7E(r)}$, donc $\frac{3M(r)}{4E(r)} < \frac{3M(r)}{E(r+1)} \leqslant \frac{6M(r)}{7E(r)}$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) $P(1) = 1$ donc $P(2) \leqslant \frac{6}{7}$ puis $P(3) \leqslant \frac{6}{7} \times \frac{6}{7}$ et en définitive $P(r) \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^{r-1}$.

La proportion $P(r)$ devient de plus en plus faible et s'approche de 0 à mesure que r devient grand.