Antilles – Guyane – Saint-Pierre-et-Miquelon – Amériques 2024

Exercice 1. Ressasser des palindromes

Dans cet exercice, on appelle *palindrome* un nombre entier naturel non nul qui vérifie la propriété suivante : si on le lit de gauche à droite (lecture habituelle) on obtient le même nombre que si on le lit de droite à gauche (lecture inversée). Par exemple : 4 ; 55 ; 474 ; 2 112 sont des palindromes tandis que 2 024 n'en est pas un (il n'est pas égal à 4 202), ni 0 (il est l'élément nul).

Le but de cet exercice est de se familiariser avec les palindromes, de les compter puis de s'intéresser ensuite plus particulièrement aux dates palindromiques.
Il est entendu que les nombres seront ici toujours codés en base décimale. Ainsi tout entier naturel non nul x peut-il s'écrire sous la forme

$$x = x_k \times 10^k + x_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + x_1 \times 10 + x_0$$

où $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sont des nombres entiers compris entre 0 et 9 (c'est-à-dire que ce sont des chiffres) et x_k est un nombre entier compris entre 1 et 9. L'entier x ainsi considéré comporte alors $k+1$ chiffres. Un tel entier est un palindrome lorsque $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k-1} \ldots$

Partie 1 : quelques résultats sur les palindromes

Q1 : *Dénombrer les palindromes.*

- **(a)** Combien y a-t-il de palindromes à un chiffre ? À deux chiffres ? Justifier qu'il y a exactement 90 palindromes à trois chiffres.
- **(b)** Plus généralement, combien y a-t-il de palindromes à n chiffres ? On discutera selon que l'entier $n \geqslant 1$ est pair, c'est-à-dire de la forme $n = 2p$, ou impair, c'est-à-dire de la forme $n = 2p+1$ avec p entier.
- **(c)** On range les palindromes dans l'ordre croissant à partir de 1 (1 est donc le premier nombre palindrome, 11 le 10ᵉ, 22 le 11ᵉ etc.). Combien de chiffres comporte le 2 024ᵉ palindrome dans son écriture décimale ?

Q2 : *Tester en langage Python si un nombre est un palindrome ou non.* Écrire une fonction `Palindrome(x,n)` prenant en argument un nombre x composé d'exactement n chiffres et renvoyant `True` s'il s'agit d'un nombre palindrome et `False` sinon. On pourra s'aider de la fonction `mystere(x)` ci-dessous, dont on indiquera le fonctionnement et l'utilité, et on rappelle qu'en langage Python `a%b` et `a//b` désignent respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b.

```python
def mystere(x) :
    t=[x%10]
    while x>9 :
        x=x//10
        t.append(x%10) #ceci ajoute l'élément x%10 à la liste t
    return t
```

Q3 : *Une propriété autour des nombres palindromes ayant un nombre pair de chiffres*

- **(a)** Montrer que si un nombre est un palindrome à quatre chiffres, alors il est divisible par 11. Réciproquement, tout nombre à quatre chiffres divisible par 11 est-il un palindrome ?
- **(b)** Montrer, plus généralement, qu'un palindrome présentant un nombre pair de chiffres est divisible par 11. On rappelle la propriété suivante : « un entier naturel est divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre la somme $x_0 + x_2 + x_4 + \ldots$ de ses chiffres de rang pair et la somme $x_1 + x_3 + x_5 + \ldots$ de ses chiffres de rang impair est elle-même divisible par 11 ».

Partie 2 : dates palindromiques

Dans cette deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux palindromes sur les dates du XXIe siècle. On écrira la date d'un jour à la façon anglo-saxonne sous la forme $M / J_1J_2 / A_1A_2$ si le mois ne contient qu'un seul chiffre (de janvier à septembre, donc) ou bien $M_1M_2 / J_1J_2 / A_1A_2$ si le mois contient deux chiffres (d'octobre à décembre, donc). Ainsi, le 6 septembre 2001 s'écrit-il 9/06/01 et le 6 décembre 2001, 12/06/01.

On associe à la date $M / J_1J_2 / A_1A_2$ le nombre $MJ_1J_2A_1A_2$. On dira alors que la date $M / J_1J_2 / A_1A_2$ est *palindromique* si le nombre $MJ_1J_2A_1A_2$ est un palindrome. On fera la même association si le mois de la date contient deux chiffres et on définit de même une date $M_1M_2 / J_1J_2 / A_1A_2$ palindromique.

On appelle *décade palindromique* une période de dix jours consécutifs palindromiques. Par exemple, la période allant du 10 février 2012 au 19 février 2012 est une décade palindromique. On cherche à compter le nombre de décades palindromiques au cours du XXIe siècle.

Q4 : Donner la raison pour laquelle les 14 mars sont baptisés « π days » par les anglo-saxons.

Q5 : Quelles contraintes portent sur les valeurs de M, M_1, M_2, J_1, J_2, A_1, A_2 du fait qu'ils codent des dates ?

Q6 : Existe-t-il une décade palindromique durant l'année 2000 ?

Q7 : Donner, en le justifiant, un exemple autre que celui de l'énoncé de décade palindromique.

Q8 : Peut-on avoir une décade palindromique qui débute par une date de la forme $M_1M_2 / J_1J_2 / A_1A_2$?

Q9 : On s'intéresse maintenant aux décades palindromiques qui débutent par une date de la forme $M / J_1J_2 / A_1A_2$. En traitant successivement les cas $J_1 = 3$, $J_1 = 0$, $J_1 = 1$ puis $J_1 = 2$, compter le nombre de décades palindromiques dans le siècle.

Exercice 2. A π day

L'objet de cet exercice est d'approximer finement le nombre π.

Q1 : On considère un carré de côté de longueur 2 unités et on note O son centre. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle dit *unité*). En comparant deux aires, démontrer que $\pi \leqslant 4$.

Q2 : Soient M et N deux points distincts du cercle unité $\mathcal{C}$, non diamétralement opposés. La longueur MN est supposée connue. Le point Q est le pied de la hauteur du triangle MON issue de O et, dans son prolongement, P est le point de cette hauteur tel que OP = 1 (cf. Figure I.1).

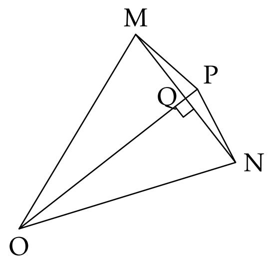


Figure I.1

(a) Déterminer la longueur OQ en fonction de MN.

(b) Exprimer l'aire A_{OMN} du triangle OMN en fonction de l'aire A_{OPN} du triangle OPN.

(c) Déterminer l'aire du triangle OMN dans le cas où OMN est un triangle rectangle en O.

Q3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui à x associe $4x(1-4x)$.

(a) Pour tout réel a de $\left[0\,;\,\frac{1}{4}\right]$, montrer qu'il existe une unique solution x_a dans $\left[0\,;\,\frac{1}{8}\right]$ à l'équation $f(x) = a$. On déterminera une expression de x_a en fonction de a.

(b) On peut ainsi définir la suite (a_n) par son premier terme $a_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout entier naturel n :

$$f(a_{n+1}) = a_n \text{ et } a_{n+1} \in \left[0\,;\,\frac{1}{8}\right].$$

Justifier que $a_{n+1} = \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{1-4a_n}\right)$.

Q4 : Soit OBC un triangle isocèle rectangle en O, B et C se trouvant sur le cercle unité. On construit une suite de points (A_n) de la manière suivante (cf. Figure I.2) :

- le point A_1 est tel que $OA_1 = 1$ et la demi-droite [OA1) est la hauteur issue de O dans le triangle OBC ;
- le point A_2 est tel que $OA_2 = 1$ et $[OA_2)$ est la hauteur issue de O dans le triangle COA_1 ;

- et ainsi de suite, pour tout entier naturel n : si le point A_n est construit, le point A_{n+1} est construit tel que $OA_{n+1} = 1$ et $[OA_{n+1})$ est la hauteur issue de O dans le triangle COA_n.

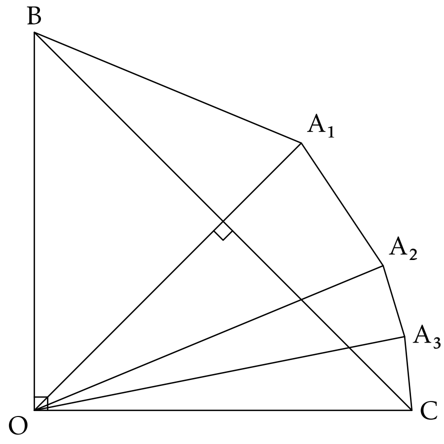


FIGURE I.2

(a) Vérifier que $A^2_{\text{OMN}} = f\left(A^2_{\text{OPN}}\right)$ puis exprimer l'aire du triangle COA_n en fonction de a_n.

(b) Déterminer une mesure en radian de l'angle $\widehat{COA_n}$.

(c) Après avoir exprimé l'aire d'un polygone régulier à 2^{n+2} côtés, inscrit dans le cercle unité $\mathcal{C}$, en fonction de l'aire du triangle COA_n, en déduire que l'aire de ce polygone vaut $2^{n+2}\sqrt{a_n}$.

Q5 : Soit P_n un polygone régulier à 2^{n+2} côtés inscrit dans le cercle unité $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que la longueur de chaque côté du polygone P_n est égale à $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

(b) Montrer que l'aire du polygone P_n est égale à $2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

(c) On admet que l'on a pour tout $\theta \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'inégalité : $\theta - \dfrac{\theta^3}{6} \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$.
En déduire que pour tout entier naturel :

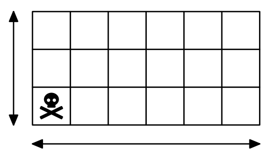
$$2^{n+2}\sqrt{a_n} \leqslant \pi \leqslant 2^{n+2}\sqrt{a_n} + \frac{8}{3 \times 2^{2n}}.$$

(d) Donner une valeur de n telle que $2^{n+2}\sqrt{a_n}$ soit une valeur approchée de π à 10^{-4} près.

Exercice 3. Le jeu du croque

Le Croque est un jeu qui se joue à deux joueurs sur un rectangle dont les dimensions font n lignes et m colonnes, où n et m sont deux nombres entiers non nuls. Les lignes sont numérotées de bas en haut, les colonnes de gauche à droite, chaque fois en commençant à 1.

À tour de rôle, chaque joueur choisit une case du rectangle, celle de son choix parmi les cases encore en jeu après le coup de son adversaire, et retire du jeu toutes les cases situées horizontalement et verticalement au même niveau ou après la case choisie. Le joueur qui doit choisir le carré en bas à gauche a perdu.
Vous pouvez imaginer que le rectangle est une tablette de chocolat et que le carré de chocolat en bas à gauche (ligne 1 et colonne 1) est empoisonné : il ne faut donc surtout pas le croquer !



Ci-dessous, on donne l'exemple d'un rectangle de 4 lignes et 6 colonnes, où la 1re case choisie par le premier joueur est située ligne 3 et colonne 2.

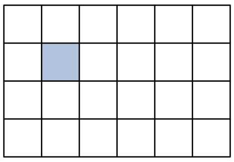
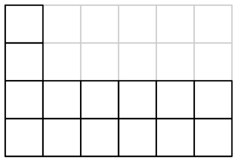


Tableau où le premier à jouer a choisi la case située en ligne 3 et colonne 2.



Nouveau tableau, après avoir croqué les cases suite au coup du premier à jouer. Son adversaire peut choisir à son tour une case parmi les cases restantes.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques stratégies gagnantes pour certaines valeurs de n et m.
Alice et Bob seront nos deux joueurs, **Alice sera toujours la première à jouer**.

Quelques configurations simples

Q1 : Si $n = m = 1$, expliquer quel joueur va toujours l'emporter.

Q2 : Si $n = 1$, et m un entier supérieur ou égal à 2, Alice peut-elle toujours l'emporter ?

Q3 : Supposons que $n = m = 2$. Représenter les quatre premiers coups possibles d'Alice et indiquer lequel ou lesquels lui permette(nt) de gagner avec certitude la partie, quels que soient les coups de Bob.

Équerre

On dit qu'on atteint une configuration *d'équerre* s'il ne reste qu'une ligne et qu'une seule colonne et que ces deux rangées comptent le même nombre de cases. On notera que les ligne et colonne restantes sont alors toutes deux de rang 1.

Q4 : Si un joueur obtient une configuration d'équerre après son coup, peut-il toujours assurer sa victoire ?

Q5 : **(a)** Supposons que $n = m$, avec $n \neq 1$. Donner un premier coup gagnant pour Alice.
(b) Si maintenant $n \neq m$, ce même premier coup se révèle-t-il gagnant pour Alice ?

Escalier

On dit qu'on atteint une configuration d'escalier s'il ne reste que deux lignes qui se touchent et dont celle du dessous est plus longue d'une case que celle du dessus. On notera que les deux lignes restantes sont alors nécessairement de rangs 1 et 2.

Q6 : Si un joueur parvient à obtenir une configuration d'escalier après son coup, peut-il assurer sa victoire ?

Q7 : Supposons que $n = 2$. Montrer qu'Alice peut toujours l'emporter.

Un tableau infini

Q8 : Considérons maintenant que le tableau est infini avec deux lignes, donc $n = 2$ et $m = \infty$. Quel joueur peut toujours l'emporter ?

Corrigé de l'exercice 1 : Ressasser des palindromes

Partie 1 : Quelques résultats sur les palindromes

Q1 : **(a)** Il y a autant de palindrome à un chiffre que d'entiers compris entre 1 et 9 donc il y a 9 palindromes à un chiffre. Un nombre à deux chiffres xy est un palindrome si et seulement si $1 \leqslant x \leqslant 9$ et $y = x$. Il y en a donc 9. Un nombre à trois chiffres xyz est un palindrome si et seulement si $1 \leqslant x \leqslant 9$ et $z = x$ et $1 \leqslant y \leqslant 9$. Il y en a donc $9 \times 10 = 90$.

(b) Si $n = 2p$ est un entier pair, le nombre x à $2p$ s'écrit en base 10 :

$$x = x_0 + x_1 \times 10 + x_2 \times 10^2 + \cdots + x_{2p-1} \times 10^{2p-1}.$$

C'est un palindrome si et seulement si $x_0 = x_{2p-1}$, $x_1 = x_{2p-2}$,…,$x_{p-1} = x_p$. Il y a alors 9 possibilités pour $x_0 = x_{2p-1}$ et 10 possibilités pour les autres $x_k = x_{2p-1-k}$ avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Il y a donc au total $9 \times 10^{p-1}$ palindromes à $2p$ chiffres.

Si $n = 2p+1$ est un entier pair, alors :

$$x = x_0 + x_1 \times 10 + x_2 \times 10^2 + \cdots + x_{2p} \times 10^{2p}.$$

C'est un palindrome si et seulement si $x_0 = x_{2p}$, $x_1 = x_{2p-1}$,…,$x_{p-1} = x_{p+1}$. Le chiffre x_p est « seul » au milieu. Il y a alors 9 possibilités pour $x_0 = x_{2p}$ et 10 possibilités pour les autres $x_k = x_{2p-k}$ avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$ et encore 10 choix pour x_p. Il y a donc au total 9×10^p palindromes à $2p+1$ chiffres.

(c) Il y a 9 palindromes à 1 chiffre et 9 palindromes à 2 chiffres. D'après la question précédente, il y 90 palindromes à trois chiffres et 90 palindromes à 4 chiffres, Il y a 900 palindromes à 5 chiffres et 900 palindromes à 6 chiffres. Or $9 + 9 + 90 + 90 + 900 + 900 = 1\,998$. Comme il y a 9 000 palindromes à 7 chiffres et $2\,024 - 1\,998 < 9\,000$, le 2 024^e palindrome aura sept chiffres.

Q2 : La fonction `mystere(x)` renvoie la liste des chiffres de x (à l'envers). Si bien que :

```
def palindrome(x,n) :
  t=mystere(x)
  for k in range(n//2) :
    if t[k] !=t[n-k-1] :
      return False
  return True
```

Q3 : **(a)** Pour tout palindrome x à quatre chiffres, il existe un entier a compris entre 1 et 9 et un entier b compris entre 0 et 9 tel que $x = 1\,000a + 100b + 10b + a$soit $x = 1\,001 + 110b = 11 \times (91a + 10b)$, ce qui prouve que x est un multiple de 11. De plus, $1\,078 = 11 \times 98$ est divisible par 11 mais n'est pas un palindrome.

(b) Soit x un palindrome ayant un nombre pair, noté $2p$, de chiffres. Alors la somme des chiffres de rang impair est $x_{2p-1} + x_{2p-3} + \cdots + x_3 + x_1$ et celle des chiffres de rang pair est $x_{2p-2} + x_{2p-4} + \cdots + x_2 + x_0$.
Or, $x_{2p-1} = x_0$, $x_{2p-3} = x_2$,…, $x_3 = x_{2p-4}$, $x_1 = x_{2p-2}$. Donc la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair du nombre est nulle donc divisible par 11.

Partie 2

Q4 : Un 14 mars est codé à l'anglo-saxonne en 3/14/XX et commence donc par le chiffre des unités et les deux premières décimales du nombre π. D'où l'appellation d'un π day !

Q5 : Comme il s'agit de dates, on a comme contraintes :

$$1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant 9\,;\ \mathrm{M}_1 = 0\,;\ 0 \leqslant \mathrm{M}_2 \leqslant 2\,;\ 0 \leqslant \mathrm{J}_1 \leqslant 3\,;\ 0 \leqslant \mathrm{J}_2 \leqslant 9\,;\ 0 \leqslant \mathrm{A}_1 \leqslant 9\,;\ 0 \leqslant \mathrm{A}_2 \leqslant 9.$$

Q6 : Une date de l'année 2000 se code en $\mathrm{MJ_1J_2}00$ ou $\mathrm{M_1M_2J_1J_2}00$. Comme ni M ni $\mathrm{M_1}$ ne peuvent être nuls, cette date ne peut être palindromique. A fortiori, il n'y aura aucune décade palindromique.

Q7 : La période du 20 janvier 2021 au 29 janvier 2021 est une autre décade palindromique car les nombres associés à ces dates sont 12 021, 12 121, 12 221, 12 321, 12 421, 12 521, 12 621, 12 721, 12 821 et 12 921 et tous ces nombres sont palindromiques.

Q8 : S'il y a deux chiffres pour le mois, une date est palindromique si elle s'écrit sous la forme $\mathrm{M_1M_2/J_1J_1/M_2M_1}$. Cette écriture empêche qu'il puisse y avoir des dates successives palindromiques. Il n'y a donc pas de période palindromique dans les mois qui s'écrivent avec deux chiffres.

Q9 : Si $\mathrm{J_1} = 3$, alors une date palindromique est de la forme $\mathrm{M/3J_2/3M}$. $\mathrm{J_2}$ peut valoir 0 ou 1 suivant M et avec $\mathrm{M} \neq 2$. On a alors M/30/3M et M/31/3M (si c'est possible). La date suivant M/31/3M est M + 1/01/3M qui n'est pas palindromique. Il ne peut donc pas exister de telle période palindromique.
Si J = 0, alors une date palindromique est de la forme $\mathrm{M/0J_2/OM}$. À M donné, $\mathrm{J_2}$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et 9. Mais la date suivant M/09/0M est M/10/0M; cette date n'est pas palindromique. On en déduit qu'il n'existe pas de telle période palindromique.
Si $\mathrm{J_1} \in \{1, 2\}$, alors la date est palindromique si elle est de la forme $\mathrm{M/J_1J_2/J_1M}$.

- Si $M \neq 2$, alors J_2 peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 9. À J_1 donné, on peut avoir 10 dates successives palindromiques (J_2 prend alors successivement toutes les valeurs entre 0 et 9). De plus, à J_1 donné, la date suivant $M/J_19/J_1M$ est $M/J_1+10/J_1M$ qui n'est pas palindromique. À J_1 donné, il y a donc dans un siècle 8 telles périodes (puisque $M \neq 2$). Donc, il y a 16 périodes si J_1 prend les valeurs 1 et 2.
- Si $M = 2$ et si $J_1 = 1$, il y a 10 dates successives palindromiques possibles. De plus, la date suivant 2/19/12 est 2/20/12 qui n'est pas palindromique. Il y a donc 1 période palindromique dans le cas où $M = 2$ et $J_1 = 1$.
- Si $M = 2$ et si $J_1 = 2$, il n'y a 10 dates successives palindromiques possibles que lors d'années bissextiles. Or l'année 22 n'est pas bissextile. Il n'y a donc aucune période palindromique dans le cas où $M = 2$ et $J_1 = 2$.

Conclusion : il y a donc $16 + 1 = 17$ périodes palindromiques sur un siècle et ces périodes palindromiques débutent par une date écrite sous la forme $M/J_1J_2/A_1A_2$ avec $J_1 \in \{1; 2\}$.

Corrigé de l'exercice 2 : A π day

Q1 : Le disque délimité par le cercle est tout inclus dans le carré. En comparant l'aire du disque à l'aire du carré on obtient l'inégalité voulue.

Q2 : **(a)** Dans le triangle OQN rectangle en Q, d'après le théorème de Pythagore, $OQ = \sqrt{ON^2 - QN^2}$ soit

$$OQ = \sqrt{1 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2}$$

puisque N est un point du cercle $\mathcal{C}$ et Q est le milieu de [MN] puisque le triangle OMN est isocèle en O.

(b) Soit s l'aire du triangle OPN. Alors $s = \dfrac{QN \times OP}{2} = \dfrac{MN}{4}$ c'est-à-dire $MN = 4s$.

Soit S l'aire du triangle OMN. Alors $S = \dfrac{OQ \times MN}{2} = \dfrac{1}{2} MN \sqrt{1 - \left(\dfrac{MN}{2}\right)^2} = 2s\sqrt{1 - 4s^2}$.

(c) Si le triangle OMN est rectangle en O, alors ce triangle est un demi-carré de côté 1 et son aire vaut $S = \dfrac{1}{2}$.

Q3 : **(a)** L'équation $f(x) = a$ s'écrit $4x(1 - 4x) = a$ soit $16x^2 - 4x + a = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 64a = 16(1 - 4a)$. Pour tout réel a de $\left[0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, $\Delta \geqslant 0$ donc l'équation a soit une unique solution $\dfrac{1}{8}$ soit deux solutions

$$x_a = \frac{4 - \sqrt{16(1-4a)}}{32} = \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{1-4a}\right) \qquad x_b = \frac{4 + \sqrt{16(1-4a)}}{32} = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{1-4a}\right)$$

et seule x_a est dans $\left[0\,;\,\dfrac{1}{8}\right]$. Cette dernière expression vaut aussi dans le cas où $a = \dfrac{1}{8}$.

(b) D'après la question a., $a_{n+1} = \dfrac{1}{8}\left(1 - \sqrt{1 - 4a_n}\right)$.

Q4 : **(a)** D'après la question 2., si on note S_n l'aire du triangle COA_n, $S_0 = \dfrac{1}{2}$ (en identifiant B à A_0) soit, puisqu'on a des nombres positifs, $S_0^2 = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(S_{n+1}^2\right) = S_n^2$. Après avoir remarqué que les carrés des aires considérées sont inférieures à $\dfrac{1}{8}$ (à partir du rang 1) on en déduit de proche en proche (le mot « récurrence » n'est pas exigé) que $S_n = \sqrt{a_n}$ pour tout n.

(b) Comme OBC un triangle isocèle rectangle en O, $\widehat{COB} = \dfrac{\pi}{2}$. Comme, à chaque étape de la construction des points A_n on divise par 2 la mesure de l'angle en O, $\widehat{COA_n} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ par progression géométrique.

(c) Un polygone régulier à 2^{n+2} côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 est constitué d'une juxtaposition de 2^{n+2} triangles égaux au triangle COA_n donc son aire vaut 2^{n+2} fois l'aire de COA_n. D'après le 3.a., l'aire d'un tel polygone est égale à $2^{n+2}\sqrt{a_n}$.

Q5 : **(a)** Comme le polygone est régulier, on se place dans le triangle COA_n. La longueur ℓ_n de chaque côté du polygone P_n est celle du côté $[CA_n]$. Si on note I le milieu de $[CA_n]$, dans le triangle COI rectangle en I, $\widehat{COI} = \dfrac{1}{2}\widehat{COA_n} = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ et $\dfrac{CI}{OC} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ soit $\dfrac{\ell_n}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ soit $\ell_n = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

(b) L'aire du triangle COA_n est égale à $\dfrac{OI \times \ell_n}{2}$. Or, dans le triangle COI rectangle en I, $\dfrac{OI}{OC} = \cos\left(\widehat{COI}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ donc l'aire du triangle COA_n est égale à

$$\frac{1}{2} \times 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

On en déduit que l'aire A_n de P_n est :

$$2^{n+2} \times \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

(c) En posant $\theta = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, ce qui est légitime puisque $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^3 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

donc

$$2^{n+1} \times \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^3\right) \leqslant \mathrm{A}_n \leqslant 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Or, $\mathrm{A}_n = 2^{n+2}\sqrt{a_n}$ donc $2^{n+2}\sqrt{a_n} \leqslant \pi \leqslant 2^{n+2}\sqrt{a_n} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{\pi^3}{2^{3n+3}}$.

Comme $\pi \leqslant 4$, on en tire $2^{n+2}\sqrt{a_n} \leqslant \pi \leqslant 2^{n+2}\sqrt{a_n} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2^6}{2^{3n+3}}$. soit

$$2^{n+2}\sqrt{a_n} \leqslant \pi \leqslant 2^{n+2}\sqrt{a_n} + \frac{8}{3 \times 2^{2n}}.$$

(d) Pour que $2^{n+2}\sqrt{a_n}$ soit une valeur approchée de π à 10^{-4} près, il suffit que $\dfrac{8}{3 \times 2^{2n}} \leqslant 10^{-4}$ soit $\dfrac{8 \times 10^4}{3} \leqslant 4^n$. Pour $n = 8$, l'inégalité est vérifiée.

Corrigé de l'exercice 3 : Le jeu du croque

Pour $1 \leqslant k \leqslant m$ et $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on note $\mathrm{C}_k\mathrm{L}_\ell$ la case de la k^{e} colonne (en partant de la gauche) et de la ℓ^{e} ligne (en partant du bas). Dans l'exemple ci-dessus, la case coloriée est la case $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_3$.

Q1 : Alice n'a pas d'autre choix que de croquer le carreau empoisonné : elle perd et Bob gagne.

Q2 : Si $n = 1$ et $m \geqslant 2$, alors, en jouant $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_1$, Alice contraint Bob à choisir la case interdite et donc gagne.

Q3 : Si Alice joue $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_1$; elle perd directement.

Si Alice joue $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_2$ alors, il ne reste plus qu'une ligne de deux cases et si Bob joue $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_1$ il ne reste plus que la colonne interdite et Alice perd.

Si Alice joue $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_2$ alors, il ne reste plus qu'une colonne à deux cases et deux lignes. Plusieurs cas se présentent alors :

- Si Bob joue $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_2$, Alice n'a plus qu'à jouer la case $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_1$ pour gagner.
- Si Bob joue $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_1$, il ne reste plus qu'une colonne à deux lignes et Alice n'a plus qu'à jouer la case $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_2$ pour gagner.
- Si Bob joue $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_1$, Alice gagne directement.

Si maintenant Alice joue $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_1$, alors il ne reste plus qu'une colonne à deux lignes et Bob n'a plus qu'à jouer la case $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_2$ pour qu'Alice perde.

Au final, la seule possibilité de gain assuré pour Alice est de jouer $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_2$.

Q4 : Oui, de proche en proche : supposons qu'Alice ait obtenu la configuration équerre après son coup. Si Bob joue $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_b$ (où $b \neq 1$), resp. $\mathrm{C}_a\mathrm{L}_1$ (où $a \neq 1$), Alice le mime par symétrie et joue $\mathrm{C}_b\mathrm{L}_1$, resp. $\mathrm{C}_1\mathrm{L}_a$ pour obtenir une nouvelle configuration d'équerre de taille moindre jusqu'à arriver à la configuration d'équerre de la question 2.

Q5 : **(a)** Si le plateau est carré, $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_2$ est un premier coup gagnant pour Alice : ceci nous ramène à une situation d'équerre, étudiée à la question précédente.

(b) Si le plateau n'est pas carré, une fois le coup $\mathrm{C}_2\mathrm{L}_2$ joué par Alice, il suffit à Bob de retailler la ligne ou la colonne restante pour se ramener à une situation d'équerre. Et cette fois c'est lui qui gagne.

Q6 : Oui, en maintenant cette configuration jusqu'à acculer l'autre joueur (c'est-à-dire obtenir après son coup le petit carré empoisonné que l'autre devra prendre). En effet, si l'adversaire retaille l'escalier en un rectangle en agissant sur la ligne 1, on rétablit l'escalier en agissant sur la ligne 2. Si maintenant l'adversaire raccourcit la ligne 2 (et donc la marche 2), on raccourcit à son tour la ligne 1, mais avec un petit carré de moins que la ligne 2.

Q7 : Il suffit à Alice de choisir la case $\mathrm{C}_m\mathrm{L}_2$. Une fois la configuration d'escalier obtenue (ou la configuration où il n'y a plus que le carré empoisonné), elle n'a plus qu'à appliquer la stratégie décrite en question précédente.

Q8 : Si Alice agit sur la ligne 2, elle permet dans la foulée à son adversaire d'avoir un escalier (il va raccourcir d'un cran de moins la ligne 1), puis ce dernier, s'il est stratège (cf. question du dessus), va l'emporter. Si Alice agit maintenant sur la ligne 1, son adversaire raccourcira d'un cran de plus la ligne 2. Dans tous les cas il va gagner dès lors qu'il a de la suite dans les idées.