# Lille 2024

## Exercice 1. Kaprekar

Ramachandra Kaprekar était un mathématicien indien (1905-1988).

### Notations

Un nombre entier non nul à $p$ chiffres est noté $n = \overline{a_{p-1} \dots a_1 a_0}$ où $a_0$ est le chiffre des unités, $a_1$ le chiffre des dizaines, etc. et $a_{p-1} \neq 0$. $n$ se décompose en base 10 sous la forme

$$n = a_{p-1} \dots a_1 a_0 = a_{p-1} \times 10^{p-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0.$$

**Exemple** : $n = 506 = 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6$ (habituellement noté 506).

### Définitions

Étant donné un entier naturel $n$ non nul, $c(n)$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre $n$ dans l'ordre croissant. $d(n)$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre $n$ dans l'ordre décroissant.
**Exemple** : $c(506) = 056 = 56$ et $d(506) = 650$
On considère la fonction K définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mathrm{K}(n) = d(n) - c(n)$.
**Exemple** : $\mathrm{K}(506) = d(506) - c(506) = 650 - 56 = 594$

### Procédé détaillant l'algorithme de Kaprekar

L'algorithme de Kaprekar consiste à répéter l'application de la fonction K :

$$n \longmapsto \mathrm{K}(n) = n_1 \longmapsto \mathrm{K}(n_1) = n_2 \longmapsto \mathrm{K}(n_2) = n_3 \longmapsto \dots$$

L'algorithme s'arrête s'il aboutit à 0 ou à un nombre $n_k$ non nul tel que $n_k = \mathrm{K}(n_k)$. Une telle valeur $n_k$ est appelée point fixe de l'algorithme de Kaprekar.
**Exemple**
En partant du nombre $n = 5294$, on obtient $n_1 = \mathrm{K}(5294) = 9542 - 2459 = 7083$. En réappliquant la fonction K on obtient : $n_2 = \mathrm{K}(7083) = 8730 - 0378 = 8352$. Puis $n_3 = \mathrm{K}(8352) = 8631 - 1368 = 7263$ etc. On peut noter : $5294 \longmapsto \mathrm{K}(5294) = 7083 \longmapsto \mathrm{K}(7083) = 8352 \longmapsto \mathrm{K}(8352) = 7263 \longmapsto \dots$

### Questions préliminaires

**Q1 :** Justifier que 2 nombres dont les chiffres sont les mêmes à l'ordre près (comme 623 et 236 par exemple) possèdent la même image par la fonction de Kaprekar. Dans certaines questions de ce sujet on pourra donc indifféremment calculer l'image par K de $n$ ou de $d(n)$.

**Q2 :** Combien d'étapes sont nécessaires pour que l'algorithme de Kaprekar s'arrête si on l'applique à un nombre entier compris entre 1 et 9 ?

## Partie I - Entiers naturels à deux chiffres : entre 10 et 99

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à deux chiffres.

**Q3 :** Appliquer l'algorithme de Kaprekar à 53.

**Q4 :** Choisir un entier naturel à deux chiffres distincts et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar.

### Questions 5 : Étude de l'arrêt de l'algorithme

**Q5 :** **(a)** Montrer que pour tout entier naturel $n$ à deux chiffres la première étape de l'algorithme aboutit à un nombre $n_1 = \mathrm{K}(n)$ multiple de 9.

**(b)** À quels entiers naturels à deux chiffres peut-on réduire l'étude de l'arrêt de l'algorithme de Kaprekar ?

**(c)** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête toujours lorsqu'on l'applique à un entier naturel à deux chiffres.

## Partie II - Entiers naturels à trois chiffres : entre 100 et 999

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à trois chiffres.

**Q6 :** Choisir un entier naturel à trois chiffres et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar. S'arrête-t-il sur un point fixe ?

**Q7 :** Soit $n = abc$ un nombre à trois chiffres. D'après la remarque de la question Q1, on considère $a \geqslant b \geqslant c$. Montrer que $n_1 = \mathrm{K}(n) = 99(a-c)$ avec $0 \leqslant a-c \leqslant 9$. En déduire que : $n_1 = 0$ ou $n_1 = 99$ ou $n_1$ est à trois chiffres.

### Questions 8 : Étude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 0$

**Q8 :** **(a)** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

**(b)** Déterminer la liste des entiers $n = abc$ avec $a \geqslant b \geqslant c$ pour lesquels $n_1 = \mathrm{K}(n) = 0$.

### Questions 9 : Étude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 99$

**Q9 :** **(a)** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ce cas.

**(b)** Déterminer la liste des entiers $n = abc$ avec $a \geqslant b \geqslant c$ pour lesquels $n_1 = \mathrm{K}(n) = 99$.

### Questions 10 : Étude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1$ s'écrit avec trois chiffres

**Q10 :** **(a)** Quelles sont les valeurs de $n_1$ possibles qui s'écrivent avec trois chiffres ?

**(b)** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

### Questions 11 : Cas d'arrêt de l'algorithme pour les entiers naturels à trois chiffres

**Q11 :** **(a)** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête pour tout entier naturel à 3 chiffres.

**(b)** Quand on leur applique l'algorithme de Kaprekar combien d'entiers naturels à trois chiffres ont 0 pour valeur d'arrêt ? Combien s'arrêtent sur un point fixe ? Quel(s) point(s) fixe(s) ?

## Partie III - Entiers naturels à quatre chiffres : entre 1000 et 9999

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à quatre chiffres. On considère maintenant un entier à quatre chiffres $n = \overline{abcd}$. D'après la remarque de la question Q1, on peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$.

**Q12 :** Montrer que l'on a l'inégalité $0 \leqslant b - c \leqslant a - d$.

**Q13 :** Montrer que $n_1 = \mathrm{K}(n) = 999(a-d) + 90(b-c)$.

**Q14 :** Justifier que $n_1$ est multiple de 9.

Dans les questions suivantes, l'action de l'algorithme de Kaprekar est étudiée en distinguant ces entiers à quatre chiffres selon les valeurs des différences $a-d$ et $b-c$.

### Questions 15 : On suppose que $a - d = 0$

**Q15 :** **(a)** Que vaut $n_1 = \mathrm{K}(n)$ dans ce(s) cas ?

**(b)** Quels sont les nombres $n$ à quatre chiffres concernés par la condition $a - d = 0$ ?

### Questions 16 : On suppose que $a - d = 1$

**Q16 :** **(a)** Déterminer les deux valeurs possibles pour $n_1 = \mathrm{K}(n)$.

**(b)** Appliquer l'algorithme de Kaprekar à ces deux valeurs.

**(c)** Quels sont les nombres à quatre chiffres pour lesquels $n_1 = \mathrm{K}(n) = 999$ ?

### Questions 17 : On suppose que $a - d \geqslant 2$

**Q17 :** On considère le tableau en ANNEXE 1 qui fait apparaître les différentes valeurs possibles de $n_1 = \mathrm{K}(n)$.

**(a)** Justifier la présence de cases «impossibles» dans le tableau notées X.

**(b)** Compléter le tableau.

### Questions 18 : L'arbre de Kaprekar

**Q18 :** Dans l'arbre de Kaprekar (en annexe) les nombres sont remplacés par leurs versions «ordonnées décroissantes» :

- chaque flèche représente l'application de la fonction K
- dans chaque case, comme l'algorithme de Kaprekar est insensible à l'ordre des chiffres d'un nombre donné, on écrit $d(n)$ pour représenter tous les entiers $n$ ayant les mêmes chiffres à l'ordre près.

**(a)** Écrire en version «ordonnée décroissante» toutes les possibilités de $n_1 = \mathrm{K}(n)$ à quatre chiffres. En dresser la liste dans l'ordre croissant.

**(b)** Sur la feuille annexe, compléter l'arbre de Kaprekar où certaines des valeurs de $n_1 = \mathrm{K}(n)$ ont été positionnées.

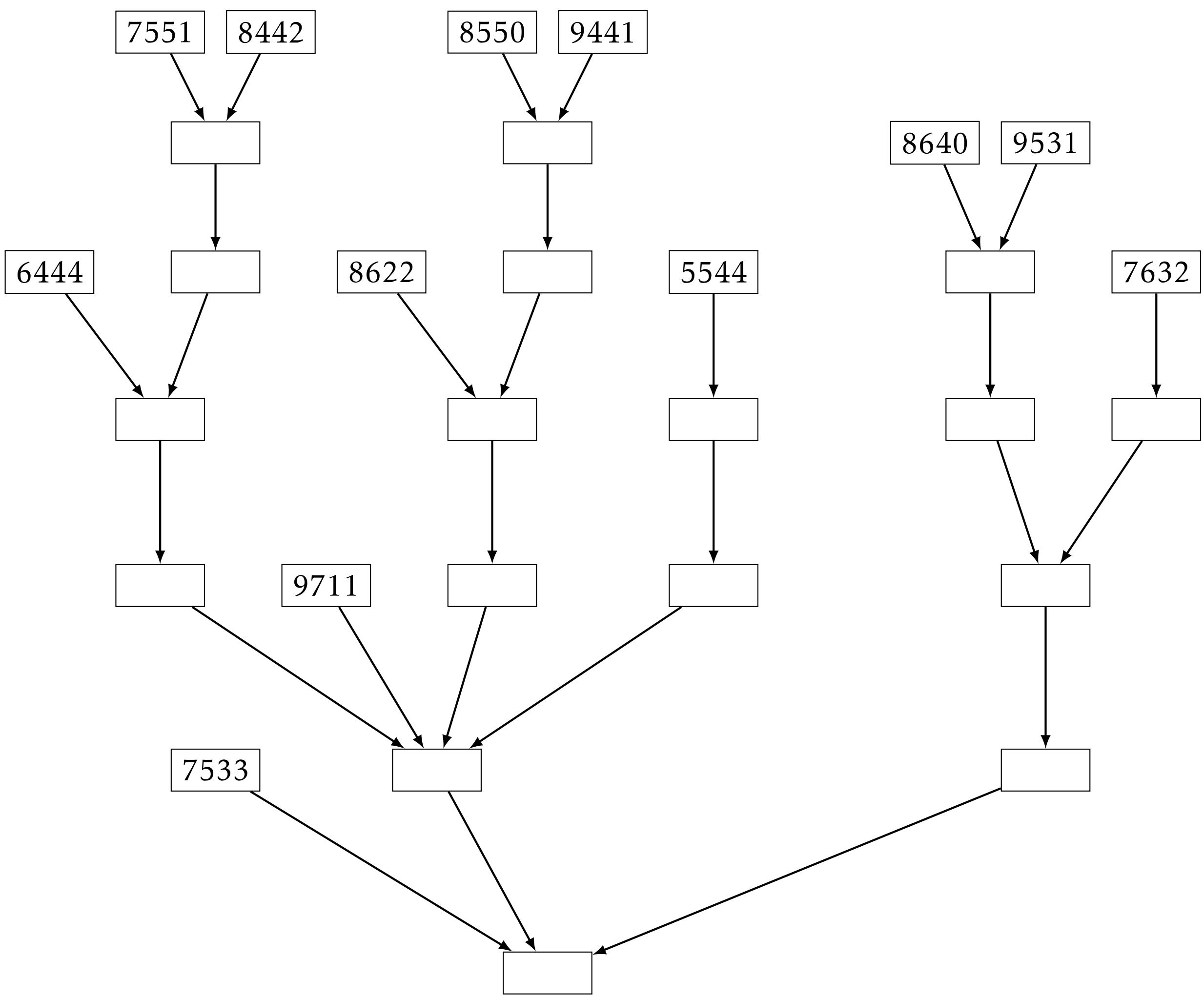
**(c)** Appliquer l'algorithme de Kaprekar au dernier nombre au bas de l'arbre de Kaprekar.

**(d)** Quels sont le(s) point(s) fixe(s) possible(s) de l'algorithme de Kaprekar pour les nombres à quatre chiffres ? Combien de nombres à quatre chiffres aboutissent à 0 ? Combien aboutissent à chacun de ce(s) point(s) fixe(s) ?

## ANNEXE 1

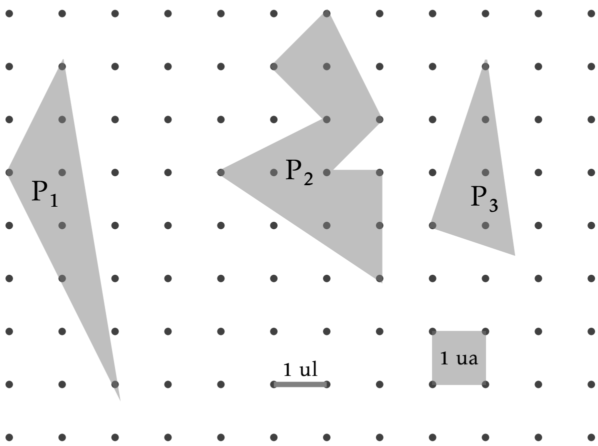
| $b-c$ \ $a-d$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | 8172 | |
| 3 | X | | | | | 7263 | 8262 | |
| 4 | X | X | | | | | | |
| 5 | X | X | X | | | | | |
| 6 | X | X | X | X | | | | |
| 7 | X | X | X | X | X | | | |
| 8 | X | X | X | X | X | X | | |
| 9 | X | X | X | X | X | X | X | |

## ANNEXE 2



## Exercice 2. Polygones de PICK

Dans tout le problème :




- On note une unité de longueur 1 ul et une unité d'aire 1 ua.
- On travaille dans un réseau pointé à maille carrée de côté 1.
- On appelle polygone de PICK un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.
- On note $i$ le nombre de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et $b$ le nombre de points du réseau sur le bord du polygone.
- On note A l'aire du polygone de PICK.

Dans la figure ci-contre, les polygones $P_1$ et $P_2$ sont des polygones de PICK et le polygone $P_3$ ne l'est pas.
Pour le polygone $P_1$, on a $i = 3$ et $b = 4$ ; pour le polygone $P_2$, on a $i = 3$ et $b = 9$.

### Partie I : Étude de quelques polygones de PICK

### Questions 1 : le cas d'un rectangle de PICK

**Q1 :** **(a)** Pour le rectangle de PICK de la figure 1 ci-contre, déterminer $i$, $b$ et A.

**(b)** Calculer $i + \dfrac{b}{2} - 1$. Que constate-t-on ?

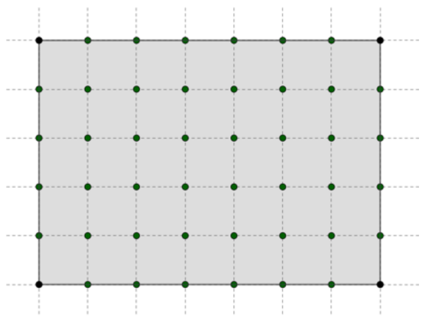


Figure 1 – questions 1

### Questions 2 : le cas des rectangles de PICK

Soit ABCD un rectangle de PICK de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans la figure 2 ci-contre). On note L sa longueur et $\ell$ sa largeur. Soient $b_R$ le nombre de points sur les bords du rectangle ABCD et $i_R$ le nombre de ses points strictement intérieurs.

**Q2 :** **(a)** Exprimer en fonction de L le nombre de points sur le côté [AD] extrémités comprises ?

**(b)** Exprimer $b_R$ et $i_R$ en fonction de L et $\ell$.

**(c)** En déduire que l'aire $A_R$ du rectangle vérifie $A_R = i_R + \dfrac{b_R}{2} - 1$.

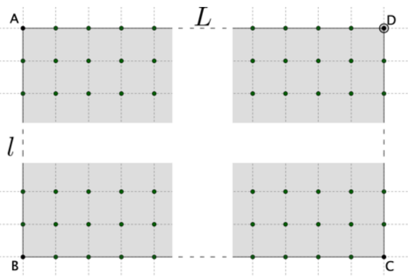


Figure 2 – questions 2

## Questions 3 : le cas d'un triangle rectangle de PICK

**Q3 :** **(a)** Pour le triangle de PICK ABC rectangle en C ci-contre, déterminer $i$, $b$ et A.

**(b)** Sur cet exemple, vérifier que l'on a $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

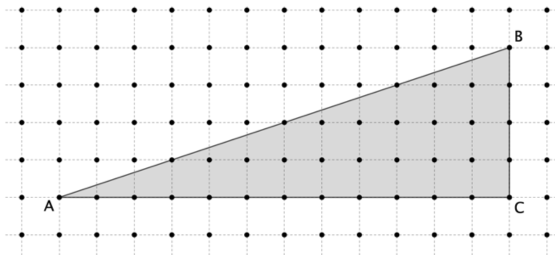



Figure 3 – questions 3

## Questions 4 : le cas des triangles rectangles de PICK

On considère le triangle rectangle de PICK ABC de la figure 2 tracé sur la figure 4. Soient $b_T$ le nombre de points sur les bords du triangle rectangle ABC, $i_T$ le nombre de ses points strictement intérieurs et $k$ le nombre de points du réseau sur le segment [AC] exceptés les points A et C.

**Q4 :** **(a)** Justifier que $b_R = 2b_T - 2 - 2k$.

**(b)** Justifier que $i_R = 2i_T + k$.

**(c)** En déduire que l'aire $A_T$ du triangle rectangle ABC vérifie $A_T = i_T + \frac{b_T}{2} - 1$.

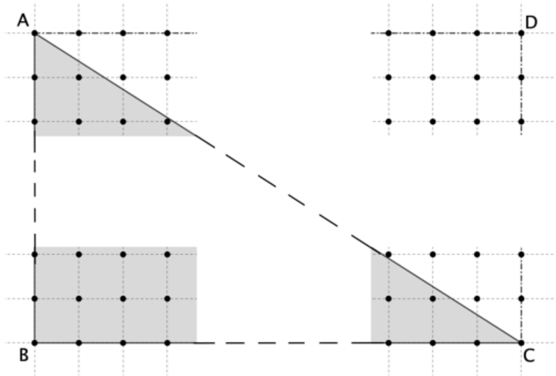



Figure 4 – questions 4

## Questions 5 : le cas de points intérieurs alignés dans un polygone de PICK

**Q5 :** **(a)** Pour la figure de l'annexe 1, déterminer $i$, $b$ et A.

**(b)** Vérifier que l'on a encore $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

**(c)** Sur l'annexe 2, tracer un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.

On appelle formule de PICK la relation $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

## Partie II : formule de PICK pour un polygone constitué de deux triangles rectangles de PICK

Soit un polygone de PICK obtenu par juxtaposition de deux triangles rectangles de PICK, $T_1$ d'aire $A_1 = i_1 - \dfrac{b_1}{2} - 1$ et $T_2$ d'aire $A_1 = i_2 - \dfrac{b_2}{2} - 1$ , comme indiqué sur la figure ci-contre :

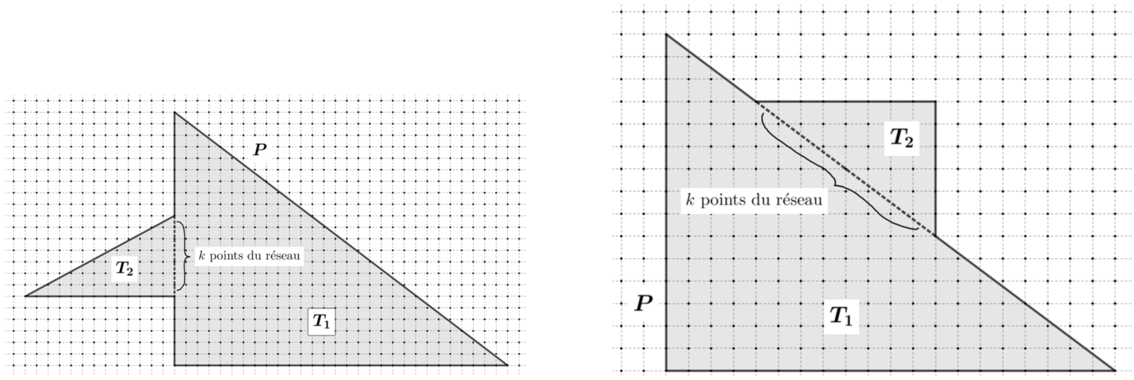



figure 5

On note $k$ le nombre de points du réseau sur le segment commun à $T_1$ et $T_2$, exceptées ses extrémités.

**Q6 :** Exprimer $i$, le nombre de points du réseau strictement intérieurs à P, en fonction $i_1$ de $i_2$ et de $k$.

**Q7 :** Exprimer $b$, le nombre de points du réseau sur le bord du polygone P, en fonction $b_1$ de $b_2$ et de $k$.

**Q8 :** Exprimer A, l'aire du polygone P , en fonction de $A_1$ et de $A_2$.

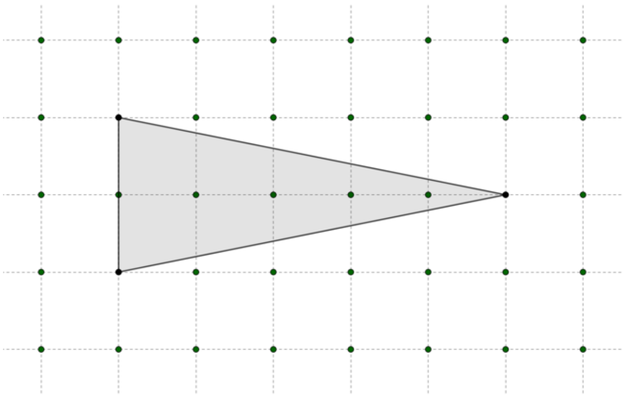
**Q9 :** La formule de PICK reste-t-elle valide pour le polygone ?

## Partie III : formule de PICK pour un polygone de PICK quelconque

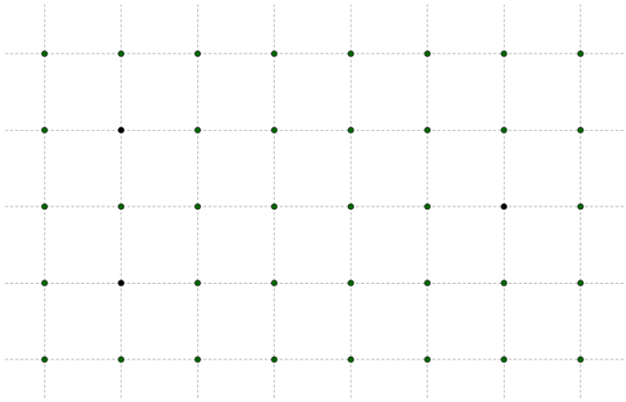
**Q10 :** Justifier que la formule de PICK reste valide pour un polygone de PICK obtenu par la juxtaposition d'un rectangle de PICK et d'un triangle rectangle de PICK.

**Q11 :** Déterminer l'aire du polygone de PICK en annexe 3.

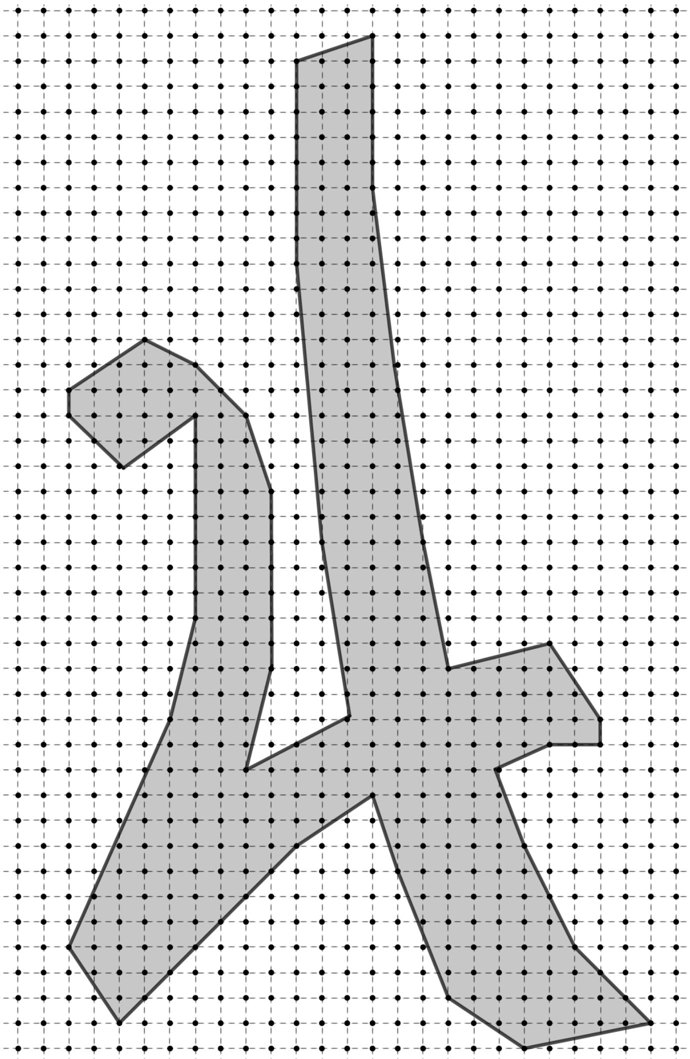
## Annexes



Annexe 1



Annexe 2



Annexe 3

Polygone de PICK proche du logo de la candidature de Paris aux J.O. de 2024

## Corrigé de l'exercice 1 : Kaprekar

**Q1 :** $d(623) = d(236) = 632$ et $c(623) = c(236) = 236$ donc $\mathrm{K}(623) = \mathrm{K}(236) = 632 - 236 = 396$. Il en est de même pour tout autre entier.

**Q2 :** On a dans tous ces cas $\mathrm{K}(n) = 0$ en une étape et l'algorithme s'arrête.

**Q3 :** En appliquant l'algorithme de Kaprekar à 53 on obtient la liste : 53, 18, 63, 27, 45, 9, 0.

**Q4 :** En fonction du choix du candidat.

**Q5 :** **(a)** Considérons un entier naturel $n$ dont les deux chiffres sont $a$ et $b$. Comme $\mathrm{K}(ab) = \mathrm{K}(ba)$ on peut supposer que $a \geqslant b$ ; il vient alors

$$n_1 = \mathrm{K}(n) = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$$

Par conséquent, $n_1 = \mathrm{K}(n)$ est un multiple de 9 qui prend une valeur entre 0 et 81 car $0 \leqslant a - b \leqslant 9$.

**(b)** On peut donc réduire l'étude aux multiples de 9 entre 18 et 81 voire aux multiples de 9 dont les chiffres sont classés dans l'ordre décroissant : 81, 72, 63, 54.

**(c)** D'après la question précédente et la question préliminaire, on peut réduire l'étude aux multiples de 9 à deux chiffres dont voici la liste : 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

Par suite, on a :

Pour 81 (et 18) : 63, 27, 45, 9, 0.

Pour 72 (et 27) : 45, 9, 0.

Pour 63 (et 36) : 27, 45, 9, 0.

Pour 54 (et 45) : 9, 0.

Deux cas sont donc possibles :

i. Soit $n_1$ est à 1 seul chiffre et l'algorithme s'arrête à $n_2 = 0$
ii. Soit $n_1$ est à 2 chiffres alors $n_2$ est un multiple de 9 à 1 ou 2 chiffres et l'algorithme s'arrête sur la valeur 0.

Bilan : Pour $n$ à 2 chiffres, dans tous les cas, l'algorithme s'arrête sur la valeur 0.

**Q6 :** En fonction du choix du candidat.

**Q7 :**

$$\mathrm{K}(n) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$$

avec $1 \leqslant a \leqslant 9$ ; $0 \leqslant c \leqslant 9$ et $a \geqslant c$ On a donc $n_1$ multiple de 99 donc $n_1 = 0$ ou 99 ou $n_1$ a 3 chiffres.

**Q8 :** **(a)** Si $n_1 = 0$ , l'algorithme s'est déjà arrêté.

**(b)** Lorsque $a - c = 0$, soit $a = b = c$ selon l'ordre décroissant et alors l'algorithme s'arrête à $n = 0$.

**Q9 :** **(a)** Si $n = 99$, et alors $\mathrm{K}(n) = 0$. L'algorithme s'arrête à $n = 0$.

**(b)** Il faut avoir $a - c = 1$ et toujours $a$, $b$, $c$ en ordre décroissant.

La liste est donc composée de 18 nombres : 100, 110, 211, 221, 322, 332, 433, 443, 544, 554, 655, 665, 766, 776, 877, 887, 988, 998.

**Q10 :** **(a)** Ce sont les multiples de 99 à 3 chiffres soit 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 et 891. Mais pas $a - c = 10$, qui est impossible car $a \leqslant 9$.

**(b)** Par suite, on a :

Pour 198 et 981 : 792, 693, 594, 495.

Pour 297 et 792 : 693, 594, 495.

Pour 396 et 693 : 594, 495.

Pour 495 et 594 : 495.

Dans tous ces cas, l'algorithme s'arrête sur la valeur 495.

**Q11 :** **(a)** D'après les questions Q7, Q8 et Q9, dans les trois seuls cas possibles portant sur $n$, l'algorithme s'arrête.

**(b)** si $n = 0$, l'algorithme s'arrête à la valeur $n = 0$ pour 9 valeurs de $n$ qui sont $111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999$

Si $n = 99$, l'algorithme s'arrête à la valeur $n = 0$ pour 18 valeurs de $n$ qui sont 100,110,211,221,322,332,433,443,544,554,655,665,766,776,877,887,988,998 ainsi que pour leurs permutations possibles, à savoir 101, 121, 112, 212, 122, 232, 223, 323,233, 343,334, 434, 344, 454, 445, 545, 455, 565, 556, 656, 566, 676, 667, 767, 677, 787, 778, 878, 788, 898, 889, 989, 899 soit 33 nombres supplémentaires.

Si $n$ est à 3 chiffres, l'algorithme s'arrête à la valeur 495 (pour les 900-9-18-33=840 autres valeurs de n entre 100 et 999)

**Q12 :** $b \leqslant a$ et $-c \leqslant -d$ puis somme des inégalités.

**Q13 :** $n = 1000a + 100b + 10c + d$ donc $\mathrm{K}(n) = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 999a + 90b - 90c - 999d = 999(a - d) + 90(b - c)$

**Q14 :** $\mathrm{K}(n) = 999(a - d) + 90(b - c) = 9(111(a - d) + 10(b - c))$.

La fonction de Kaprekar, à chaque étape, donne une valeur $n_k$ multiple de 9. Comme il s'agit d'un entier à 4 chiffres, $n_k$ est un multiple de 9 entre 1000 et 9999.

**Q15 :** **(a)** $\mathrm{K}(n) = 999(a-d)+90(b-c) = 90(b-c)$ mais comme $a = d$ et $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ alors $a = b = c = d$ et donc $\mathrm{K}(n) = 0$

**(b)** 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999

**Q16 :** **(a)** $\mathrm{K}(n) = 999(a - d) + 90(b - c) = 999 + 90(b - c)$ mais comme $a = d + 1$ et $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ alors $a = b = c + 1 = d + 1$ ou $a = b + 1 = c + 1 = d + 1$ et donc $\mathrm{K}(n) = 999 + 90 = 1089$ ou $\mathrm{K}(n) = 999$.

**(b)** Pour 1089 : $9810 - 0189 = 9621$ ; $9621 - 1269 = 8352$ ; $8532 - 2358 = 6174$ ; $7641 - 1467 = 6174$. Il s'agit d'un point fixe, l'algorithme s'arrête.

Pour 999, on trouve 0.

**(c)** 1000, 1110, 2111, 2221, 3222, 3332, 4333, 4443, 5444, 5554, 6555, 6665, 7666, 7776, 8777, 8887, 9888, 9998

**Q17 :** **(a)** La différence entre les chiffres du milieu ne peut pas être supérieure à celle entre les chiffres extrêmes car $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$.

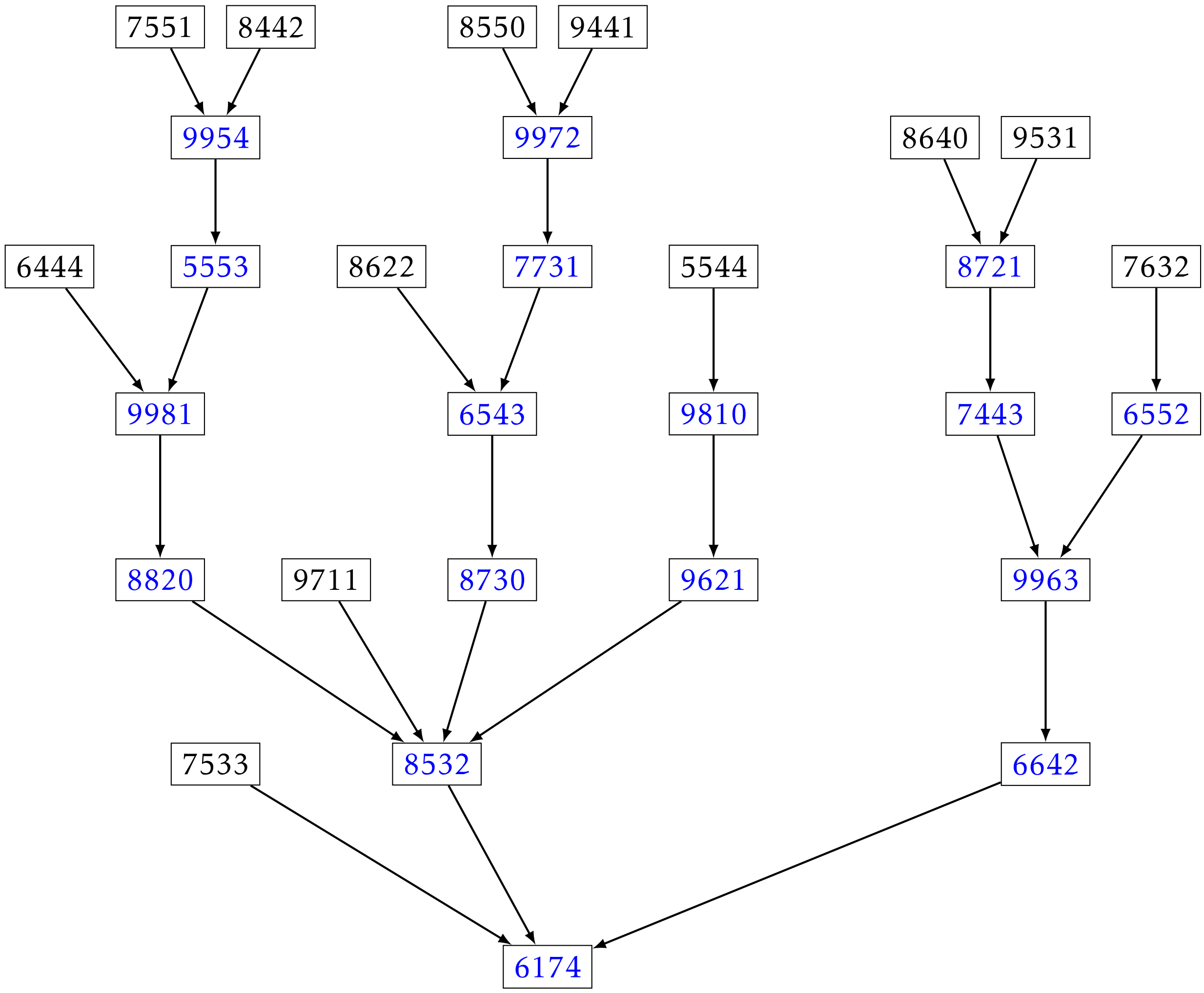
**(b)**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1998 | 2997 | 3996 | 4995 | 5994 | 6993 | 7992 | 8991 |
| 2088 | 3087 | 4086 | 5085 | 6084 | 7083 | 8082 | 9081 |
| 2178 | 3177 | 4176 | 5175 | 6174 | 7173 | 8172 | 9171 |
| X | 3267 | 4266 | 5265 | 6264 | 7263 | 8262 | 9261 |
| X | X | 4356 | 5355 | 6354 | 7353 | 8352 | 9351 |
| X | X | X | 5445 | 6444 | 7443 | 8442 | 9441 |
| x | X | X | X | 6534 | 7533 | 8532 | 9531 |
| X | X | X | X | X | 7623 | 8622 | 9621 |
| X | X | X | X | X | X | 8712 | 9711 |
| X | X | X | X | X | X | X | 9801 |

**Q18 :** La liste suivante donne l'application de l'algorithme de Kaprekar à 4 chiffres multiples de 9 (et d'après la remarque de la question 13 l'étude peut être réduite à ces valeurs) :

Pour 9999 (et 0) : 0
Pour 9990 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9981 : 9711, 8523, 6174, 6174
Pour 9972 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9963 : 9531, 8352, 6174, 6174
Pour 9954 : 9441, 8172, 6174, 6174
Pour 9945 : 9351, 8352, 6174, 6174
Pour 9936 : 9261, 8352, 6174, 6174
Pour 9927 : 9171, 8352, 6174, 6174
Pour 9918 : 9081, 8172, 6174, 6174
Pour 9909 : 8991, 7173, 6354, 6174, 6174
Pour 9900 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9801 : 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9792 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9783 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9774 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9765 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9756 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9747 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9738 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9729 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9720 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9711 : 8523, 6174, 6174
Pour 9702 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9693 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9684 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9675 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9666 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9657 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9648 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9639 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9630 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9621 : 8523, 6174, 6174
Pour 9612 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9603 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9594 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9585 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9576 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9567 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9558 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9549 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9540 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9531 : 8352, 6174, 6174
Pour 9522 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9513 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9504 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9495 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9486 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9477 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9468 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9459 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9450 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9441 : 8172, 6174, 6174
Pour 9432 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9423 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9414 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9405 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9396 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9387 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9378 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9369 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9360 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9351 : 8352, 6174, 6174
Pour 9342 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9333 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9324 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9315 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9306 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9297 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9288 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9279 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9270 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9261 : 8352, 6174, 6174
Pour 9252 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9243 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9234 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9225 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9216 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9207 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9198 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9189 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9180 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9171 : 8352, 6174, 6174
Pour 9162 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9153 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9144 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9135 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9126 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9117 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9108 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9099 : 9621, 8523, 6174, 6174
Pour 9090 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9081 : 8172, 6174, 6174
Pour 9072 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9063 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9054 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9045 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9036 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9027 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9018 : 9801, 8712, 7533, 6174, 6174
Pour 9009 : 8991, 7173, 6354, 6174, 6174

On peut conjecturer que l'algorithme s'arrête sur 0 ou sur 6174. Pour $n$ quelconque à 4 chiffres, l'algorithme s'arrête car $\mathrm{K}(n)$ est un multiple de 9 à 4 chiffres et l'algorithme s'arrête sur la valeur 6174.




## Corrigé de l'exercice 2 : Polygones de PICK

**Q1 :** **(a)** $i = 24$, $b = 24$, $\mathrm{A} = 35$.

**(b)** $i + \dfrac{b}{2} - 1 = 24 + \dfrac{24}{2} - 1 = 35$. On constate que $i + \dfrac{b}{2} - 1 = \mathrm{A}$.

**Q2 :** **(a)** [AD] compte $\mathrm{L} + 1$ points du réseau.

**(b)** $b_{\mathrm{R}} = \text{Périmètre}_{\mathrm{ABCD}} = 2\mathrm{L} + 2\ell$ et $i_{\mathrm{R}} = (\mathrm{L} - 1)(\ell - 1)$.

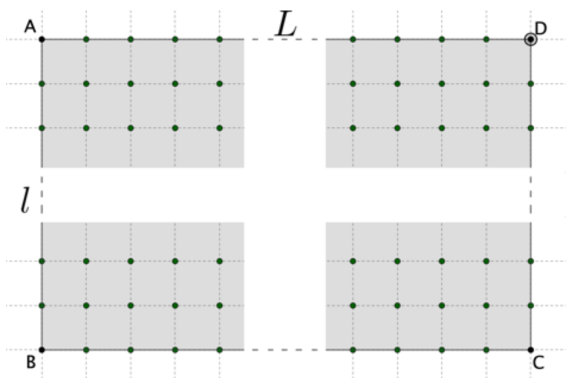



Figure I.1 : *questions 2*

**(c)**

$$i_{\mathrm{R}} + \frac{b_{\mathrm{R}}}{2} - 1 = (\mathrm{L} - 1)(\ell - 1) + \frac{2\mathrm{L} + 2\ell}{2} - 1 = \mathrm{L}\ell - \ell - \mathrm{L} + 1 + \mathrm{L} + \ell - 1 = \mathrm{L}\ell = \mathrm{A}$$

**Q3 :** **(a)** $i = 15$, $b = 20$, $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$.

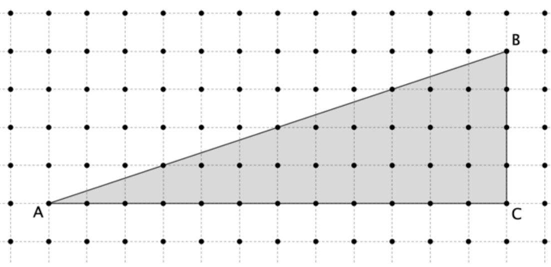



FIGURE I.2 : *questions 3*

**(b)** $i + \frac{b}{2} - 1 = 15 + \frac{20}{2} - 1 = 24 = \mathrm{A}$.

**Q4 :** **(a)** Les triangles ABC et ADC sont superposables et leur union forme le rectangle ABCD. En décomposant $2b_\mathrm{T}$, on commence bien par compter $b_\mathrm{R}$. Puis les points A et C ont été comptés deux fois donc on ôte 2 pour ne les compter qu'une seule fois chacun. Les points du segment [AC] exceptés les points A et C ont été comptés deux fois et il faut les ôter complètement. D'où le terme « -2k ». Finalement, on a bien $b_\mathrm{R} = 2b_\mathrm{T} - 2 - 2k$.

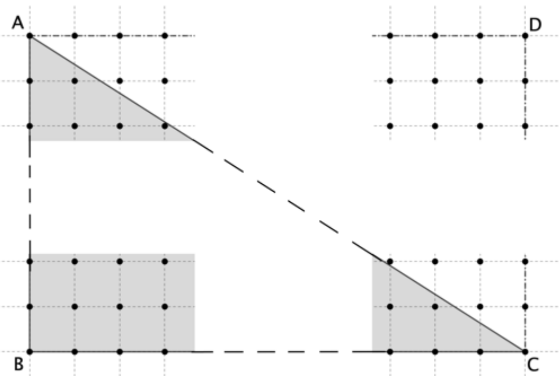



FIGURE I.3 : *questions 4*

**(b)** Avec un même raisonnement de décomposition, l'ensemble des points intérieurs du rectangle ABCD est l'union des points intérieurs des triangles ABC et ADC ainsi que ceux « intérieurs » du segment [AC]. On a donc directement $i_\mathrm{R} = 2i_\mathrm{T} + k$.

**(c)** D'après **Q 4-a**, $b_\mathrm{R} = 2b_\mathrm{T} - 2 - 2k \Rightarrow b_\mathrm{T} = \frac{b_\mathrm{R} + 2 + 2k}{2} \Rightarrow \frac{b_\mathrm{T}}{2} = \frac{b_\mathrm{R}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{k}{2}$. D'après **Q 4-b**, $i_\mathrm{R} = 2i_\mathrm{T} + k \Rightarrow i_\mathrm{T} = \frac{i_\mathrm{R}}{2} - \frac{k}{2}$. C'est pourquoi

$$i_\mathrm{T} + \frac{b_\mathrm{T}}{2} - 1 = \frac{i_\mathrm{R}}{2} - \frac{k}{2} + \frac{b_\mathrm{R}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - 1 = \frac{i_\mathrm{R} + b_\mathrm{R}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{A}}{2} \text{ d'après } \textbf{Q 2-c} = \mathrm{A}_\mathrm{T}$$

**Q5 :** **(a)** $i = 4$, $b = 4$, $\mathrm{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$.

**(b)** $i + \frac{b}{2} - 1 = 4 + \frac{4}{2} - 1 = 5$. On a encore $\mathrm{A} = i + \frac{b}{2} - 1$.

**(c)** Un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.

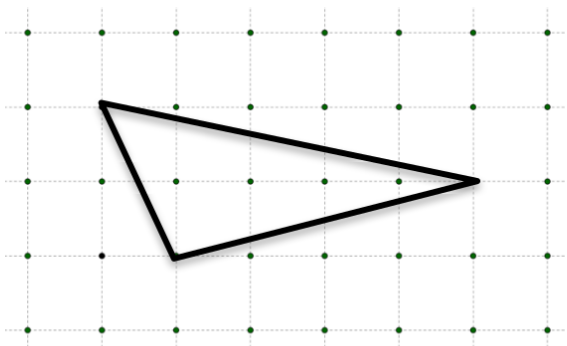


Figure 5

**Q6 :** Même raisonnement qu'en question 4 : $i = i_1 + i_2 + k$.

**Q7 :** Même raisonnement qu'en question 4 : $b = b_1 + b_2 - 2k - 2$.

**Q8 :** $\text{A} = \text{A}_1 + \text{A}_2$.

**Q9 :** $i + \dfrac{b}{2} - 1 = i_1 + i_2 + k + \dfrac{b_1 + b_2 - 2k - 2}{2} - 1 = \left(i_1 + \dfrac{b_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \dfrac{b_2}{2} - 1\right) = \text{A}_1 + \text{A}_2 = \text{A}$

**Q10 :** En traçant la diagonale du rectangle, on obtient alors trois triangles de PICK juxtaposables. On applique donc la conservation de la formule de PICK (partie 2) à ces trois triangles (2 à 2) et elle reste valable.

**Q11 :** Le polygone de PICK en annexe 3 est décomposable en juxtapositions de rectangles et triangles rectangles de PICK. D'après la Q 10, la formule de PICK reste valable.

Donc on compte : $i = 272$, $b = 74$.

Et on a :
$$\text{A} = i + \frac{b}{2} - 1 = 272 + \frac{74}{2} - 1 = 308$$