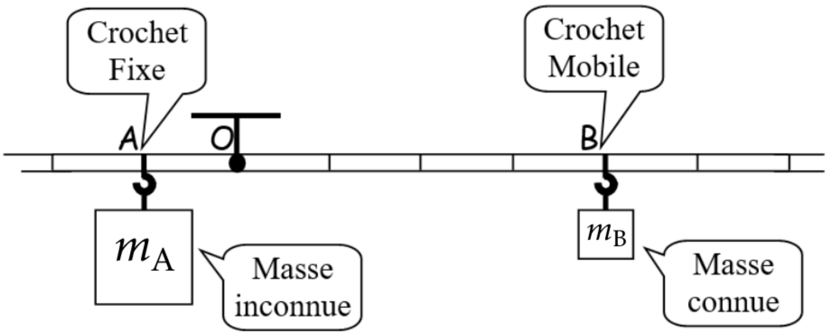
Aix-Marseille 2024

Exercice 1. Barycentres

Partie 1 - Balance romaine

Sur les marchés, on voit encore, de temps en temps, des balances romaines qui permettent de peser des produits.
L'ensemble du système est suspendu en O. Afin d'évaluer sa masse, on accroche en A l'objet de masse inconnue m_A.
A l'aide d'un crochet mobile, on déplace une masse m_B connue, jusqu'à l'obtention de l'équilibre.
Cet instrument de mesure est directement basé sur le principe d'Archimède selon lequel $m_A \times OA = m_B \times OB$.

Par exemple, sur le schéma ci-dessous, l'équilibre est obtenu lorsque la masse m_B (de 1 kg) est en B.
On obtient l'égalité $OB = 4OA$, on a $m_A \times OA = 1 \times OB$ et on en déduit que $m_A = 4$ kg.



Q1 : Justifier la relation vectorielle $m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

Q2 : On suppose que $m_B = 500$ g et que $\overrightarrow{OB} = -5\overrightarrow{OA}$. Déterminer la valeur de m_A.

Q3 : On suppose que $m_B = 1$ kg et que $m_A = 3$ kg. Donner la position du point B et déterminer la relation vectorielle correspondante.

Q4 : On suppose que A et B sont fixes. Placer deux points A et B quelconques et le point O tel que $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Partie 2 - Barycentre de deux points

Définition : Un **point pondéré** est un couple (A, α) où A est un point du plan et α un nombre réel non nul. α est appelé **poids** du point A.

Définition : Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés où α et β sont deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.
On appelle **barycentre** des points A et B, le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

On notera alors $G = \text{bar}\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$
Définition : Soient A et B deux points. La **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $||\overrightarrow{AB}||$ est la longueur AB du segment [AB].

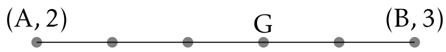
Q1 : Dans cette question, on considère deux points (A, α) et (B, β) tel que $\alpha = \beta$.
On note G le barycentre des points (A, α) et (B, α).

(a) Tracer un segment [AB] de longueur 6 cm.

(**b**) En utilisant l'égalité vectorielle, placer le point G_1, barycentre des points $(A, 1)$ et $(B, 1)$.
(**c**) En utilisant l'égalité vectorielle, placer le point G_2, barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, 3)$.
(**d**) Quelle conjecture peut-on émettre sur le point G barycentre des points (A, α) et (B, α).
(**e**) Déterminer, grâce à une égalité vectorielle, la nature du point G par rapport au segment [AB].

Q2 : Dans cette question, on considère deux points $(A, 2)$ et $(B, 3)$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

On place le barycentre G des points $(A, 2)$ et $(B, 3)$ le segment [AB] comme présenté ci-dessous :



On considère maintenant deux points pondérés (A, α) et (B, β) avec α et β deux réels positifs non nuls.

Q3 : Soit k un réel non nul. Montrer que $\text{bar}\,\{(A, \alpha)\,;(B, \beta)\} = \text{bar}\,\{(A, k\alpha)\,;(B, k\beta)\}$

Q4 : (**a**) Montrer que si G est le barycentre de (A, α) et (B, β), alors pour tout point M du plan, on a

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

(**b**) En déduire que $||\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}|| = (\alpha + \beta)||\overrightarrow{MG}||$

(**c**) Soit p un nombre strictement positif.
On définit l'ensemble Ω comme l'ensemble des points M du plan tel que $||\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}|| = p$
Quelle est la nature géométrique de l'ensemble Ω ?

Exercice 2. Nombre d'or

Définition :
Le nombre d'or est une proportion qui désigne l'unique rapport entre deux longueurs a et b telles que le quotient de la somme des deux longueurs par la plus grande soit égal à celui de la plus grande par la plus petite.

C'est donc l'unique rapport entre a et b tel que $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$ avec $0 < b < a$.
Le nombre d'or est souvent désigné par la lettre Φ.

Partie 1 - Propriétés algébriques du nombre d'or

Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$

Q1 : On pose $\Phi = \dfrac{a}{b}$

(**a**) Montrer que Φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

(**b**) Justifier que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donner une valeur approchée de Φ arrondie à 10^{-3}.

(**c**) Montrer que $\gamma = 1 - \Phi$ est aussi solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Q2 : (**a**) Montrer que $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$

(**b**) En déduire les deux égalités suivantes : $\Phi = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\Phi}}$ et $\Phi = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\Phi}}}$

Q3 : On considère les fractions suivantes :

$F_0 = 1\,;$ $\quad F_1 = 1 + \dfrac{1}{1}\,;$ $\quad F_2 = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1}}\,;$ $\quad F_3 = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1}}}\,;$ $\quad \ldots$

(**a**) Calculer F_4 et F_5 et les simplifier.

(**b**) Donner une expression de F_{n+1} en fonction de F_n pour tout entier naturel n.

(**c**) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer F_n pour tout entier naturel n.

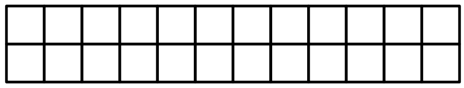
```
def approximation_nbre_or(n) :
    f=...
    for i in range(n) :
        f=...
    return f
```

(**d**) Quelle valeur renvoie cette fonction Python pour $n = 10$ et pour $n = 20$?

(**e**) Quelle conjecture peut-on faire lorsque n devient grand ?

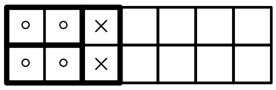
Partie 2 - Pavages

On considère un quadrillage de longueur n carreau et de hauteur 2 carreaux.



n carreaux

On souhaite paver ce quadrillage à l'aide de briques de 2 carreaux. Ainsi, chaque brique recouvre 2 carreaux adjacents du quadrillage (2 carreaux ayant un côté commun).



On notera $\mathrm{P}(n)$ le nombre de pavages distincts du quadrillage n par 2. On pose par convention que $\mathrm{P}(0) = 1$

Q1 : Déterminer $\mathrm{P}(1)$ et $\mathrm{P}(2)$

Q2 : On admet que $\mathrm{P}(3) = 3$ et que $\mathrm{P}(4) = 5$. Tracer tous les pavages possibles pour chacune de ces deux valeurs de n.

Q3 : Justifier que pour tout n entier naturel non nul, $\mathrm{P}(n+1) = \mathrm{P}(n) + \mathrm{P}(n-1)$

Partie 3 : Suites de Fibonacci

Q1 : Soit k un nombre réel non nul. Montrer que :
Pour tout n entier naturel non nul, $k^{n+1} = k^n + k^{n-1}$ si et seulement si $k = \Phi$ ou $k = 1-\Phi$.

Q2 : Soient α et β deux nombres réels et la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n non nul , $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (on appelle une telle suite, une suite de Fibonacci)

Q3 : On admet que les nombres de la forme u_n sont les seuls à vérifier $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
Déterminer α et β tels que $u_0 = u_1 = 1$.

Partie 4 : Retour aux pavages

Grâce aux parties 2 et 3, déterminer :

Q1 : une expression de $\mathrm{P}(n)$ pour tout entier naturel n ;

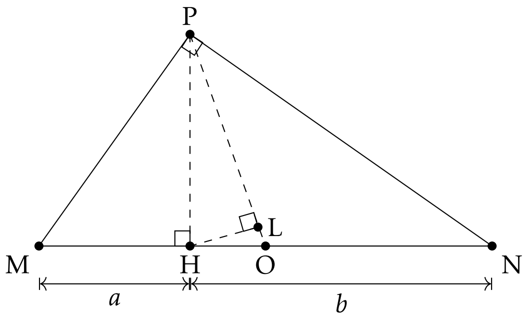
Q2 : puis une valeur de $\mathrm{P}(2024)$.

Exercice 3. Autour de la moyenne

La moyenne de deux nombres est un indicateur statistique permettant de résumer ces deux nombres en un seul. Par défaut, il s'agit de la moyenne arithmétique, qui se calcule comme somme des deux valeurs divisée par deux. Mais d'autres moyennes peuvent être plus adaptées selon le contexte, nous allons en découvrir deux autres, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique.

Partie 1 - Présentations géométriques

Le triangle MNP est rectangle en P,
H est le pied de la hauteur issue de P,
O est le milieu du segment [MN].



Voici des relations utiles dans un triangle rectangle, qui seront admises :

(1) $\mathrm{MP}^2 + \mathrm{NP}^2 = \mathrm{MN}^2$

(2) $\mathrm{OP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{MN}$

(3) $\mathrm{MP} \times \mathrm{NP} = \mathrm{MN} \times \mathrm{PH}$

(4) $\mathrm{MP}^2 = \mathrm{MH} \times \mathrm{MN}$

(5) $\mathrm{NP}^2 = \mathrm{NH} \times \mathrm{MN}$

(6) $\mathrm{PH}^2 = \mathrm{MH} \times \mathrm{NH}$

Dans le triangle OHP rectangle en H, L est le pied de la hauteur issue de H.
On pose $a = \mathrm{MH}$ et $b = \mathrm{NH}$.

L'objectif est de calculer, en fonction de a et de b les longueurs $m = \mathrm{OP}$, $g = \mathrm{PH}$ et $h = \mathrm{PL}$.

Q1 : Utiliser les relations ci-dessus pour vérifier que :

(a) $m = \dfrac{a+b}{2}$ $\quad$ m est appelée **moyenne arithmétique**.

(b) $g = \sqrt{ab}$ $\quad$ g est appelée **moyenne géométrique**.

(c) $g^2 = mh$ et en déduire que $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ $\quad$ h est appelée **moyenne harmonique**.

Q2 : Prenons $0 < a < b$. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous

a	b	m	g	h
1	5			
0,25	1			
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$			

Q3 : Les calculs précédents ou les propriétés géométriques de la figure nous amènent à établir un ordre entre les nombres a, b, m, g, h. Énoncer cette conjecture !

Partie 2 - Comparaisons des moyennes

On suppose toujours $0 < a < b$.

Q1 : Montrer que $a < h$ en étudiant le signe de $h - a$.

Q2 : Montrer que $m < b$.

Q3 : Montrer que $g < m$ en développant $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$

Q4 : Montrer que $h < g$, on pourra utiliser $g^2 = mh$.

Q5 : La conjecture énoncée à la question 1) est-elle démontrée ?

Partie 3 - Encadrement de la racine carrée

Nous avons vu que $a < h < g < m < b$ et que $g^2 = mh = ab$ pour deux nombres a et b tels que $0 < a < b$.

Q1 : Considérons le programme en Python suivant :

```python
def racine_carre(b, n ) :
  a=1
  for i in range(n) :
     a, b = 2*a*b/(a+b), (a+b)/2
  return a, b
```

En python la commande a,b=3,4 affecte simultanément la valeur 3 à a et la valeur 4 à b.

Faisons fonctionner ce programme pour $b = 5$ et $n = 3$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

a	b	h	m	Encadrement de $g = \sqrt{5}$
1	5	$\frac{5}{3}$	3	$1 < \sqrt{5} < 3$
$\frac{5}{3}$	3			$\frac{5}{3} < \sqrt{5} < 3$

Q2 : Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Notons a_1 et b_1 respectivement la moyenne harmonique et arithmétique de a et b puis a_2 et b_2 respectivement la moyenne harmonique et arithmétique de a_1 et b_1.
Justifier que les encadrements s'emboitent, c'est-à-dire que $a < a_1 < a_2 < g < b_2 < b_1 < b$

Corrigé de l'exercice 1 : Barycentres

Partie 1 - Balance romaine

Q1 : D'après le principe d'Archimède selon lequel $m_A \times OA = m_B \times OB$, les vecteurs $m_A\overrightarrow{OA}$ et $m_B\overrightarrow{OB}$ ont même norme. De plus ils ont aussi même direction et des sens opposés donc $m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

Q2 : On a $m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff m_A\overrightarrow{OA} - 500 \times 5\overrightarrow{OA} = \vec{0} \iff (m_A - 2500)\overrightarrow{OA} = \vec{0} \iff m_A = 2500$

Q3 : On a $m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OA}$

Q4 : On a $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Partie 2 - Barycentre de deux points

Q1 : Dans cette question on résout directement avec les points pondérés (A, α) et (B, α) qui donnent, comme $\alpha \neq 0$, $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$, donc G est le milieu de [AB].

Q2 : Comme dans la question 3 de la partie 1, on a

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{GA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ par Chasles.

Q3 : On a $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où le résultat.

Q4 : **(a)** $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ par Chasles.

(b) En passant à la norme dans l'égalité précédente, on a le résultat sachant que $|\alpha+\beta| = \alpha+\beta$ car α et β sont positifs.

(c) $||\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}|| = p \iff (\alpha+\beta)MG = p \iff MG = \frac{p}{\alpha+\beta}$ donc Ω est le cercle de centre G et de rayon $\frac{p}{\alpha+\beta}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Nombre d'or

Partie 1 - Propriétés algébriques du nombre d'or

Q1 : **(a)** $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff a^2 = b(a+b)$ donc $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = \frac{a^2 - ab - b^2}{b^2} = \frac{b(a+b) - ab - b^2}{b^2} = 0$

(b) Le discriminant de $x^2 - x - 1$ est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$, ce trinôme admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Donc $\Phi = x_2 \approx 1,618$.

(c) $1 - \Phi = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = x_1$ solution.

Q2 : **(a)** D'après l'équation vérifiée par Φ, on a $\Phi^2 = \Phi + 1$ donc $1 + \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi+1}{\Phi} = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi$

(b) Il sufΦ de remplacer Φ par $1 + \frac{1}{\Phi}$ aux dénominateurs respectifs.

Q3 : **(a)** $F_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $F_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $F_4 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ et $F_5 = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

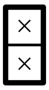
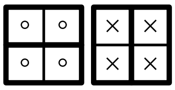
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par construction, $F_{n+1} = 1 + \frac{1}{F_n}$

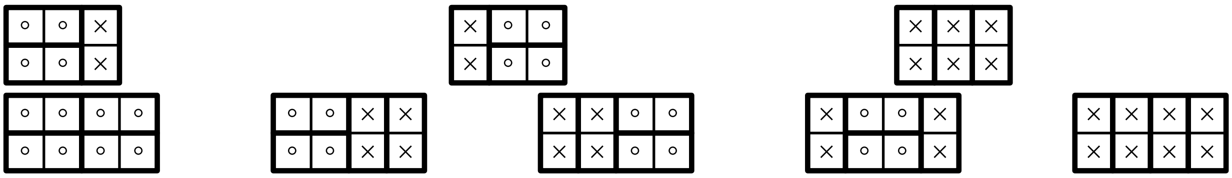
(c)
```
def approximation_nbre_or(n) :
f=1
for i in range(n) :
f=1+1/f
return f
```

(d) Pour $n = 10$ environ 1.6179775 et pour $n = 20$ environ 1.61803.

(e) On peut conjecturer que le processus tend vers Φ

Partie 2 - Pavages

Q1 :  donc P(1) = 1 et  donc P(2) = 2

Q2 : 

Q3 :

Partie 3 : Suites de Fibonacci

Q1 : $k^{n+1} = k^n + k^{n-1} \iff k^{n-1}(k^2 - k - 1) = 0 \iff k^2 - k - 1 = 0$ si et seulement si $k = \Phi$ ou $k = 1 - \Phi$

Q2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_n + u_{n-1} &= \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n + \alpha\Phi^{n-1} + \beta(1-\Phi)^{n-1} = \alpha\Phi^{n-1}(\Phi+1) + \beta(1-\Phi)^{n-2}(2-\Phi) \\ &= \alpha\Phi^{n-1}\Phi^2 + \beta(1-\Phi)^{n-2}(1-\Phi)^2 = \alpha\Phi^{n+1} + \beta(1-\Phi)^{n+1} = u_{n+1} \end{aligned}$$

Q3 : On résout le système :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 & (\ell_1) \\ \alpha\Phi + \beta(1-\Phi) = 1 & (\ell_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 & ((1-\Phi)\ell_1 - \ell_2) \\ \alpha\Phi + \beta(1-\Phi) = 1 & (\Phi\ell_1 - \ell_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{\Phi}{2\Phi - 1} \\ \beta = \dfrac{\Phi - 1}{2\Phi - 1} \end{cases}$$

Or $2\Phi - 1 = \sqrt{5}$ donc $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - (1-\Phi)^{n+1}\right)$

Partie 4 : Retour aux pavages

Q1 : $\mathrm{P}(n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - (1-\Phi)^{n+1}\right)$

Q2 : P(2024) = 7087392816114092863104543288308926461944946038998920616722423608260
4099658203847310453210034752507663571251278788765714713388091764789762469772757119
4993510261758622303698434275625929244269110857095599152999421410208683245194925859
3261926539269295547917554734932050201448943970113804340476690946736876721454604153
4889031423157115607192652848932874907073563079266748583593203614791301291050131854
8192446375610424016293967650.

Corrigé de l'exercice 3 : Autour de la moyenne

Partie 1 - Présentations géométriques

Q1 : **(a)** $m = \mathrm{OP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{MN} = \dfrac{a+b}{2}$

(b) $g^2 = \mathrm{PH}^2 = \mathrm{MH} \times \mathrm{NH} = ab$ d'où $g = \sqrt{ab}$

(c) La relation (5) appliquée dans le triangle rectangle (OHP) en H donne $g^2 = \mathrm{PH}^2 = \mathrm{PO} \times \mathrm{PL} = mh$.

Donc $h = \dfrac{g^2}{m} = ab \times \dfrac{2}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$

Q2 :

a	b	m	g	h
1	5	3	$\sqrt{5}$	$\frac{5}{3}$
0,25	1	$\frac{5}{8}$	0,5	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$

Q3 : On remarque que $a < h < g < m < b$.

Partie 2 - Comparaisons des moyennes

Q1 : $a - h = \dfrac{a(a+b) - 2ab}{a+b} = \dfrac{a(a-b)}{a+b} < 0$ car $0 < a < b$ donc $a < h$

Q2 : $b - m = \dfrac{2b - a - b}{2} = \dfrac{b-a}{2} > 0$ car $0 < a < b$ donc $b > m$

Q3 : $0 < \dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = m - g$ donc $m > g$

Q4 : D'après la question précédente, $g < m$, donc $gh < mh$ ou $gh < g^2$ donc $h < g$ car $h > 0$ et $g > 0$.

Q5 : En résumé, $a < h < g < m < b$ d'après les 4 questions précédentes.

Partie 3 - Encadrement de la racine carrée

Q1 :

a	b	h	m	Encadrement de $g = \sqrt{5}$
1	5	$\frac{5}{3}$	3	$1 < \sqrt{5} < 3$
$\frac{5}{3}$	3	$\frac{15}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3} < \sqrt{5} < 3$
$\frac{15}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{105}{47}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{15}{7} < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$
$\frac{105}{47}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{4935}{2207}$	$\frac{2207}{987}$	$\frac{105}{47} < \sqrt{5} < \frac{47}{21}$

Q2 : Posons $a_1 = \dfrac{2ab}{a+b}$, $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $a_2 = \dfrac{2\dfrac{2ab}{a+b}\dfrac{a+b}{2}}{\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{a+b}{2}} = \dfrac{4ab(a+b)}{4ab+(a+b)^2}$, $b_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{4ab+(a+b)^2}{4(a+b)}$.

Calculons la moyenne géométrique $g_1$de a_1 et b_1 : $g_1 = \sqrt{\dfrac{2ab}{a+b}\dfrac{a+b}{2}} = \sqrt{ab} = g$

Donc la moyenne géométrique reste constante.

Calculons $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{2ab}{a+b} \times \dfrac{4ab+(a+b)^2}{4ab(a+b)} = \dfrac{4ab+(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2} < 1$ car $4ab < (a=b)^2$; en effet $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$.

Donc $a_1 < a_2$

De même $\dfrac{b_2}{a_1} == \dfrac{4ab+(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2} < 1$. Donc $b_2 < b_1$

Conclusion : $a < a_1 < a_2 < g < b_2 < b_1 < b$.

Remarque (niveau terminale et supérieur) : Posons (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, a_{n+1} la moyenne harmonique de a_n et b_n, $b_0 = b$ et b_{n+1} la moyenne arithmétique de a_n et b_n.

On démontre que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante (par récurrence dont l'initialisation est faite dans ce sujet), que $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$ car $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc convergent vers une limite qui n'est autre que g.