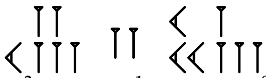
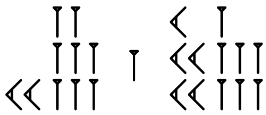
Exercice 1. Mathématiques babyloniennes

Le système de numération que nous utilisons aujourd'hui pour écrire les nombres est un système décimal. Il utilise la base 10 ainsi que 10 symboles appelés chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Par exemple : 17 043 a pour valeur $1 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 10000 + 7000 + 0 + 40 + 3$
Il y a 4 000 ans, les habitants de la Mésopotamie (Babyloniens), écrivaient sur des tablettes d'argile fraîche qu'ils laissaient ensuite sécher au soleil. Elles se sont souvent très bien conservées, c'est pourquoi on connaît des textes très anciens de ces peuples.
Un certain nombre de tablettes contient des mathématiques. Les nombres y sont écrits en base 60 (ce système est appelé sexagésimal), avec les deux seuls symboles : un *clou* pour une unité et un *chevron*  pour une dizaine.
Par exemple, le nombre qu'ils écrivaient :  se lit «15 2 34» dans le système sexagésimal, et vaut dans notre système décimal $15 \times 60^2 + 2 \times 60^1 + 34 \times 60^0 = 15 \times 3600 + 2 \times 60 + 34 \times 1 = 54154$.

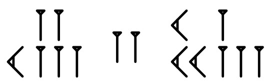
Partie 1 - Généralités

Q1 : Que vaut le nombre  dans le système décimal ?

Q2 : On donne les égalités suivantes : $7321 = 2 \times 3600 + 121$ et $121 = 2 \times 60 + 1$.
En déduire l'écriture de 7321 dans le système sexagésimal des babyloniens en utilisant clous et chevrons.

Q3 : Par abus de langage un nombre écrit dans le système décimal sera appelé *nombre décimal*.
Écrire les nombres décimaux 24 015 et 156 092 dans le système sexagésimal des babyloniens en utilisant les clous et chevrons.

Q4 : **(a)** Quels problèmes rencontre-t-on pour écrire le nombre décimal 36 000, le nombre décimal 3 601 ?
(b) Que manquait-il au système sexagésimal babylonien ?

Pour éviter toute confusion, on écrira désormais le nombre babylonien  sous la forme 15.2.34.
Le nombre décimal 36 000 sera ainsi écrit 10.0.0 et le nombre décimal 3 601 sera écrit 1.0.1 en système sexagésimal.

Partie 2 - Inverse au sens babylonien

Soit n un entier naturel. On dit que m est un *inverse de n au sens babylonien* si $m \times n$ est une puissance de 60.
Par exemple, 3 est un inverse de 20 au sens babylonien car $3 \times 20 = 60 = 60^1$.
De même, 36 est un inverse de 100 au sens babylonien car $36 \times 100 = 3600 = 60^2$.
On dira que $(3; 20)$ et $(36; 100)$ sont des couples d'inverses au sens babylonien.

Q1 : Si un nombre possède un inverse au sens babylonien, cet inverse est-il unique ? Justifier.

Q2 : Déterminer l'ensemble des diviseurs de 60 et en déduire quatre autres couples d'inverses au sens babyloniens.

Q3 : Montrer que 2.13.20 est un inverse de 27 au sens babylonien.

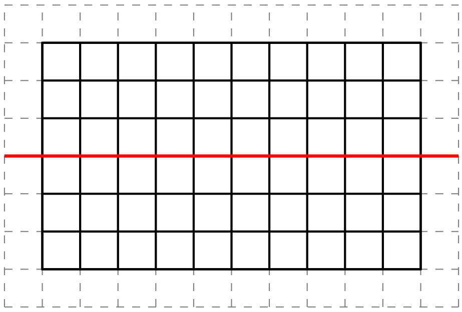
Q4 : **(a)** Montrer que 1 est son propre inverse au sens babylonien.
(b) Existe-t-il d'autres entiers qui sont leur propre inverse ? Justifier.

Q5 : Montrer que 7 ne possède pas d'inverse au sens babylonien.

Q6 : Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier n admette un inverse au sens babylonien.

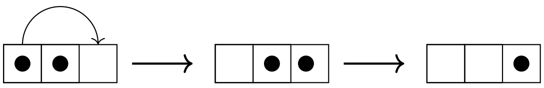
Q7 : **(a)** Déduire de la question précédente que 1.41.15 admet un inverse au sens babylonien.
(b) Déterminer le plus petit d'entre eux dans le système sexagésimal.

Exercice 2. Les soldats de Conway



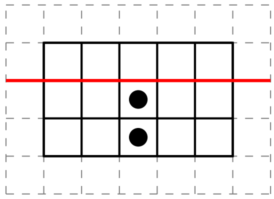
On considère une grille infinie composée de cases carrées partagée par une ligne horizontale dite « de front » (infinie aussi), comme sur la figure ci-contre.
On dispose sous la ligne de front un nombre fini de pions (les soldats), un par case : c'est la configuration initiale.
L'objectif est d'amener un soldat au-dessus de la ligne de front, dans une case la plus éloignée possible de cette ligne.

Pour ce faire, un seul mouvement est autorisé : pour évoluer, un pion doit être placé à côté d'une case adjacente occupée (deux cases sont adjacentes si elles partagent un côté), elle-même suivie dans la même direction d'une case vide. Le pion peut alors sauter la case non vide et prendre place dans la case disponible. Le pion enjambé est ensuite retiré de la grille :

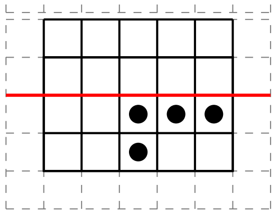


Dans la suite du sujet, les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 - Des exemples



Q1 : **(a)** Justifier que la configuration initiale ci-contre permet à un soldat d'atteindre une case de la première rangée au-dessus de la ligne de front.



(b) Montrer que la configuration initiale ci-contre permet à un soldat d'atteindre une case de la deuxième rangée au-dessus de la ligne de front.

Q2 : Justifier que quelle que soit la configuration initiale choisie, il n'y a plus de mouvement possible au bout d'un certain nombre d'étapes.

Q3 : Proposer une configuration initiale permettant d'atteindre une case de la troisième rangée au-dessus de la ligne de front.

Partie 2 - Une question de poids

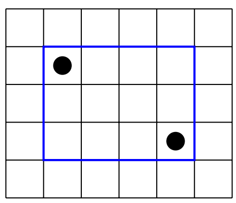
Q1 : Montrer qu'il existe un unique réel $q \in]0;1[$ tel que $1 = q + q^2$. Ce réel sera toujours désigné par q dans la suite du problème.

Q2 : On rappelle l'identité valable pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

où l'on somme les puissances successives du réel q, où q est le réel déterminé à la question précédente.
Soient m et p deux entiers naturels, montrer que :

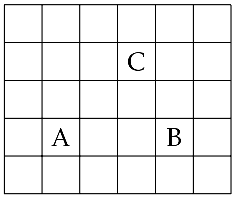
$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} \cdots + q^{m+p} = q^{m-2}(1 - q^{p+1})$$



Q3 : Deux pions déterminent un unique rectangle composé de cases dont ils occupent celles situées à des sommets opposés du rectangle, comme sur la figure ci-contre.
On définit la distance entre deux pions comme l'entier naturel $h + v - 2$ où h et v sont respectivement le nombre de cases sur le côté horizontal et vertical du rectangle associé aux deux pions.

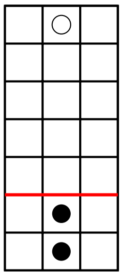
Dans l'exemple précédent, le côté horizontal du rectangle compte 4 cases, donc $h = 4$, et le côté vertical, 3 cases, donc $v = 3$. Ainsi, la distance entre ces deux pions vaut $h + v - 2 = 3 + 4 - 2 = 5$.

Calculer les trois distances entre les pions dont les positions sont repérées par les lettres A, B et C dans la configuration ci-contre.



Q4 : On fixe dans la grille un pion positionné dans la cinquième rangée au-dessus de la ligne de front. Ce pion sera dénommé *pion objectif* et représenté par un disque vide dans la suite.
Pour une configuration de pions donnée, on attribue à chaque pion un poids défini par le réel q^d où d est la distance du pion au pion objectif. En cohérence avec les définitions, le poids du pion objectif est 1.
Enfin, on attribue à chaque configuration de pions un poids défini par la somme des poids des pions qui la composent.

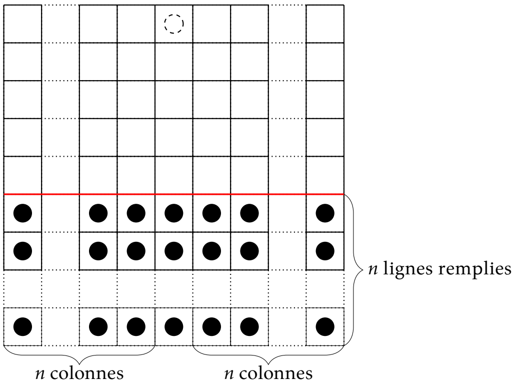
- **(a)** Justifier que toute configuration de pions contenant le pion objectif aura un poids supérieur ou égal à 1.
- **(b)** Montrer que la configuration de pions ci-contre a un poids de $1 + q^4$.



Partie 3 - L'inaccessible cinquième lignes

Dans la suite du sujet, nous allons démontrer qu'il n'existe aucune configuration initiale permettant d'atteindre une case de la cinquième ligne.

Q1 : Justifier que, quelle que soit la configuration initiale, il existe un entier naturel n tel que le poids de celle-ci soit inférieur ou égal à celui de la configuration ci-dessous (où le pion objectif – en pointillés – ne sert ici que de repère visuel et ne fait pas partie de la configuration).



Q2 : Dans la grille ci-dessous, on indique pour la configuration de la question précédente le poids de chaque pion inscrit en lieu et place de celui-ci. On définit de plus un nom pour chaque colonne.

- **(a)** Calculer le poids total de la colonne C_0
- **(b)** Montrer que le poids total des colonnes C_1 à C_n est $q^2(1-q^n)^2$.
- **(c)** Montrer que le poids total de la configuration est $(1-q^n)(1-2q^{n+2})$
- **(d)** En déduire que toute configuration initiale a un poids strictement inférieur à 1.

C_{-n}		C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2		C_n
q^{5+n}		q^7	q^6	q^5	q^6	q^7		q^{5+n}
q^{6+n}		q^8	q^7	q^6	q^7	q^8		q^{6+n}
q^{4+2n}		q^{6+n}	q^{5+n}	q^{4+n}	q^{5+n}	q^{6+n}		q^{4+2n}

Q3 : Soit n un entier naturel non nul, et soient deux cases adjacentes occupées par des pions de poids q^n et q^{n+1}. Montrer que tout mouvement de l'un de ces deux pions par rapport à l'autre ne peut pas augmenter le poids de la configuration.

Q4 : Conclure que quelle que soit la configuration initiale, il est impossible d'atteindre une case de la cinquième rangée au-dessus de la ligne de front.

Exercice 3. Permutations

On appelle permutation sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$ des entiers de 1 à n, une façon de mélanger des nombres compris entre 1 et n.

Par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

On dira que :
1 est envoyé en 3 ; 2 est envoyé en 5 ;
3 est envoyé en 2 ; 4 est inchangé ;
5 est envoyé en 1.

De façon plus mathématique, à chaque valeur entière comprise entre 1 et 5, on associe une unique image elle aussi entière et comprise entre 1 et 5 (toutes les images devant être différentes).
Elle est notée :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on « mélange » des valeurs comprises entre 1 et 5, on dit que cette permutation est de degré 5.
Il existe une permutation de degré 5 particulière qui laisse inchangées toutes les valeurs ; elle se note :

$$\mathrm{Id}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Partie 1 - Étude de quelques exemples de permutations

Q1 : Donner la notation de la permutation de degré 4 pour laquelle la valeur 1 est envoyée en 3, la valeur 2 reste inchangée, la valeur 3 est envoyée en 4 et la valeur 4 est envoyée en 1.

Q2 : Donner la liste des 6 permutations de degré 3.

Q3 : Combien existe-t-il de permutations de degré 4 ? La réponse doit être justifiée mais il n'est pas demandé de faire la liste de toutes ces permutations.

Partie 2 - Produit de permutations

On note $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Le produit de P_1 et P_2, que l'on note $P_1 * P_2$ consiste à appliquer **la permutation P_2 suivie de la permutation P_1.**
On a ici :

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \text{« a pour image » .... par la permutation } P_2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \text{« a pour image » .... par la permutation } P_1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

On a donc

$$P_1 * P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Q1 : **(a)** Soient A et B deux permutations de degré 4 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) A-t-on $A * B = B * A$?

(c) Peut-on trouver 2 permutations de degré 4 distinctes A_1 et A_2 telles que $A_1 * A_2 = A_2 * A_1$?

Q2 : On note $\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

On admet que pour toute permutation A (ici de degré 4), il existe une unique permutation, notée A^{-1} telle que $A^{-1} * A = \mathrm{Id}_4$

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) A-t-on $A * A^{-1} = \mathrm{Id}_4$?

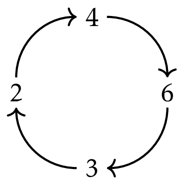
(c) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer B^{-1}.

(d) Montrer que, pour toute permutation A de degré 4, on a : $A * A^{-1} = A^{-1} * A$.

Partie 3 - Permutations et cycles

Observons la permutation de degré 6 : $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Par cette permutation, les valeurs 1 et 5 restent inchangées et, la valeur 2 a pour image 4, qui a pour image 6, qui a pour image 3, qui a pour image 2.



Dans cette permutation, 4 valeurs sont « échangées » de façon cyclique, on appelle donc cette permutation un cycle.
On le note $\mathrm{C} = (2, 4, 6, 3)$.
Les valeurs 1 et 5 n'apparaissent pas, ce qui sous-entend qu'elles restent inchangées.

Q1 : Donner la notation sous forme d'un cycle de chacune des permutations suivantes :

$$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Q2 : En réutilisant le produit défini dans la partie 2, déterminer :

(a) $(1, 3, 4) * (1, 2, 5)$

(b) $(1, 3, 5)^2 = (1, 3, 5) * (1, 3, 5)$

(c) $(1, 3, 2, 5)^{-1}$

Q3 : Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathrm{P}^n = \underbrace{\mathrm{P} * \mathrm{P} * \mathrm{P} * \cdots * \mathrm{P}}_{n \text{ fois}}$. On suppose ici $\mathrm{P} \neq \mathrm{Id}$.

On admet que si P est un cycle alors il existe un entier naturel k non nul tel que $\mathrm{P}^k \neq \mathrm{Id}$.
On appelle ordre du cycle, le plus petit entier k vérifiant cette égalité.

(a) Montrer que l'ordre d'un cycle de 2 éléments vaut 2.

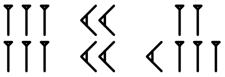
(b) Déterminer l'ordre d'un cycle de 3 éléments (justifier précisément la réponse).

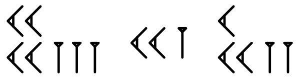
Corrigé de l'exercice 1 : Mathématiques babyloniennes

Partie 1 - Généralités

Q1 : On lit 28.1.57 ce qui donne dans le système décimal : $28 \times 60^2 + 60 + 57 = 100917$.

Q2 : $7321 = 2 \times 60^2 + 2 \times 60 + 1$ ou 2.2.1 d'où  .

Q3 : Par division euclidienne, $24015 = 24000+15 = 400\times 60+15 = (6\times 60+40)\times 60+15 = 6\times 60^2+40\times 60+15$ d'où 

Par diviion euclidienne, $156092 = 43 \times 3600 + 21 \times 60 + 32$ d'où 

Q4 : **(a)** 36000 s'écrit avec un chevron mais il n'y a pas de symbole zéro pour indiquer sa position, donc on peut confondre avec 600 ou 10. De même 3601 s'écrit avec 2 clous, donc on peut confondre avec 61 ou 3660.

(b) Il manque un symbole pour indiquer un décalage de postition, comme notre 0 en système décimal.

Partie 2 - Inverse au sens babylonien

Q1 : On a vu que 3 est un inverse de 20, mais $180 \times 20 = 60^2$. Donc 180 est aussi un inverse de 20. Il n'y a pas unicité des inverses.

Q2 : Les diviseurs positifs de 60 forment les couples recherchés : $(1;60)$, $(2;30)$ $(3;20)$, $(4;15)$, $(5;12)$, $(6;10)$.

Q3 : 2.13.20 est le nombre décimal $2\times 3600+13 times 60+20 = 7200+780+20 = 8000$. Or $8000\times 27 = 216000 = 60^3$. Il est bien un inverse de 27.

Q4 : **(a)** $1 \times 1 = 1 = 60^0$

(b) 60 et toutes ses puissances sont leur propres inverses.

Q5 : 7 n'est pas un diviseur d'une puissance de 60.

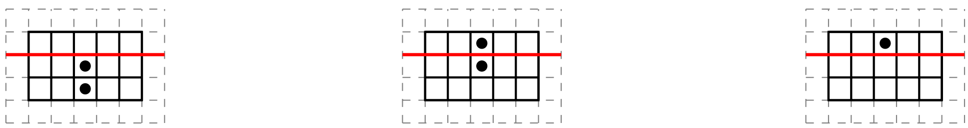
Q6 : n admet un inverse au sens babylonien si, et seulement s'il est un diviseur d'une puissance de 60.

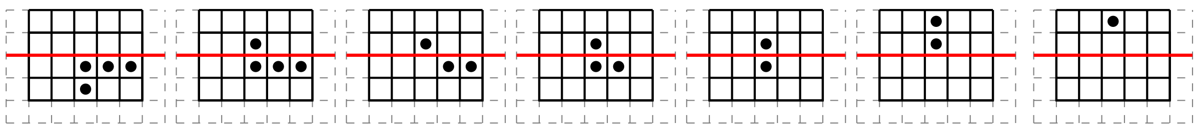
Q7 : **(a)** 1.41.15 est le nombre décimal 6075 qui est un diviseur de 60^5 (donc de 60^p avec $p \geqslant 5$ entier), mais pas de 60^4.

(b) $60^5/6075 = 128000$ soit 35.33.20.

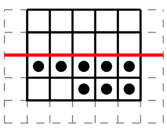
Corrigé de l'exercice 2 : Les soldats de Conway

Partie 1 - Des exemples

Q1 : **(a)** 

(b) 

Q2 : On enlève un pion à chaque étape, les pion sont en nombre fini, d'où la terminaison du processus.

Q3 : 

Partie 2 - Une question de poids

Q1 : On résout l'équation $x^2 + x - 1$ de discriminant $5 > 0$ d'où deux solutions $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $q = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0;1[$

Q2 : Soient m et p deux entiers naturels,on a :

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} \cdots + q^{m+p} = q^m\left(1+q+q^2+\cdots+q^p\right) = q^m\left(\frac{1-q^{p+1}}{1-q}\right) = q^m\left(\frac{1-q^{p+1}}{q^2}\right) = q^{m-2}\left(1-q^{p+1}\right)$$

Q3 : AB = 3, AC = 4 et BC = 3.

Q4 : **(a)** Le pion objectif ayant un poids de 1, toute configuration de pions contenant le pion objectif aura un poids supérieur ou égal à 1.

(b) $1 + q^5 + q^6 = 1 + q^4(q + q^2) = 1 + q^4$ car $1 = q = q^2$.

Partie 3 - L'inaccessible cinquième lignes

Q1 : On peut toujours inclure le rectangle fabriqué par les points extrèmes de la configuration initiale, dans un rectangle plein de n lignes et $2n + 1$ colonnes.

Q2 : **(a)** $q^5 + q^6 + \cdots + q^{n+4} = q^5 + q^6 + \cdots + q^{5+n-1} = q^3(1 - q^n)$ d'après la question 2 de la partie 2.

(b) Pour trouver les poids des colonnes C_1 à C_n, on multiplie le poids de C_0 respectivement par $q, q^2, \ldots q^{n-1}$.
D'où un poids total de $q^3(1 - q^n)(q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = q^3(1 - q^n)q^{-1}(1 - q^n) = q^2(1 - q^n)^2$

(c) Symétriquement par rapport à la colonne C_0, on trouve un poids total de
$q^3(1-q^n)+2q^2(1-q^n)^2 = q^2(1-q^n)(q+2-2q^n) = (1-q)(1-q^n)(2+q-2q^n) = (1-q^n)(2+q-2q^n-2q-q^2+2q^{n+1})$
$= (1 - q^n)(2 - q - q^2 - 2q^n(1 - q)) = (1 - q^n)(1 - 2q^{n+2})$

(d) D'après la question 1, il existe un entier n tel que le poids de la configuration initiale est inférieur à $(1 - q^n)(1 - 2q^{n+2})$.
Or $q \in]0;1[$ donc $0 < q^n < 1$ et $0 < 1 - q^n < 1$. De plus $0 < q^{n+2} < 1$ et $0 < 2q^{n+2} < 2$ donc $-1 < (1 - 2q^{n+2}) < 1$. Donc $|(1 - q^n)(1 - 2q^{n+2})| < 1$.
Donc le poids de la configuration initiale est inférieur strictement à 1.

Q3 : Tout mouvement de l'un de ces deux pions par rapport à l'autre supprime un pion donc la configuration à un poids inférieur au poids précédent.

Q4 : D'après la question 4a de la partie 2, toute configuration de pions contenant le pion objectif aura un poids supérieur ou égal à 1 ce qui entre en contracdiction avec la question précédente. Donc il est impossible d'atteindre une case de la cinquième rangée au-dessus de la ligne de front.

Corrigé de l'exercice 3 : Permutations

Partie 1 - Étude de quelques exemples de permutations

Q1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Q2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Q3 : Il y a 4 choix pour l'image de 1, 3 pour celle de 2, 2 pour celle de 3 et il ne reste alors qu'un choix pour l'image de 4. Soit $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutations.

Partie 2 - Produit de permutations

Q1 : **(a)**

$$\begin{array}{cccc l} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \text{« a pour image » .... par la permutation B} \\ 4 & 1 & 3 & 2 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \text{« a pour image » .... par la permutation A} \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \end{array}$$

donc $A * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b)

$$\begin{array}{cccc l} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \text{« a pour image » .... par la permutation A} \\ 2 & 4 & 1 & 3 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \text{« a pour image » .... par la permutation B} \\ 1 & 2 & 4 & 3 & \end{array}$$

donc $B * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \neq A * B$

(c) S'il on prend $A_1 = A$ et $A_2 = Id_4$, cela fonctionne.

On peut prendre aussi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dont le produit dans un sens ou dans l'autre donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Q2 : **(a)** $A^{-1} * A = \mathrm{Id}_4$

(b) $A * A^{-1} = \mathrm{Id}_4$ aussi

(c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ donc les produits dans un sens ou dans l'autre donnent Id_4.

Partie 3 - Permutations et cycles

Q1 : $P_1 = (1, 3, 4, 5)$ et $P_2 = (1, 4, 2)$

Q2 : **(a)** $(1, 3, 4) * (1, 2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $(1, 3, 5)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $(1, 3, 2, 5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Q3 : **(a)** $(a, b)^2$ envoie a sur a et b sur b, les autres entiers restant inchangés, on obtient bien l'identité.

(b) $(a, b, c)^3$ envoie a sur a, b sur b et c sur c, les autres entiers restant inchangés, on obtient bien l'identité. Mais $(a, b, c)^2$ envoie a sur $c \neq a$. Donc l'ordre est 3.