Exercice 1. Partages de carrés et de rectangles

Partie 1 - Partage de carrés.

Soit n un nombre entier naturel strictement positif. On dit que n est partageable lorsque le carré de côté n peut être partagé en exactement n carrés dont les côtés ont des longueurs entières.
Par exemple, les figures ci-dessous nous montrent que les entiers 6, 9 et 11 sont partageables (les nombres entiers inscrits à l'intérieur de chaque carré indiquent la longueur du côté du carré).

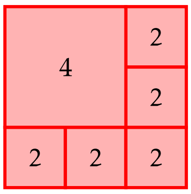


Figure a

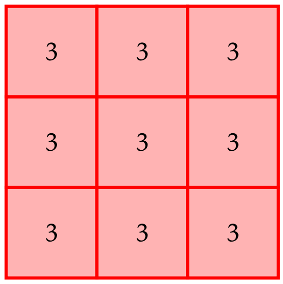


Figure b

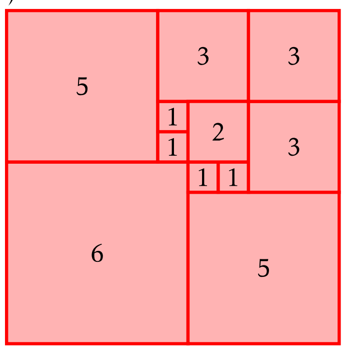


Figure c

Figure a : le carré de côté 6 est partagé en six carrés : un carré de côté 4 et cinq carrés de côté 2.
Figure b : le carré de côté 9 est partagé en neuf carrés de côté 3.
Figure c : le carré de côté 11 est partagé en onze carrés : un carré de côté 6, deux carrés de côté 5, trois carrés de côté 3, un carré de côté 2 et quatre carrés de côté 1.

Q1 : Montrer que le nombre 3 n'est pas partageable.

Q2 : Justifier par une figure que le nombre 4 est partageable.

Q3 : Soit p un nombre entier naturel non nul. Montrer que p^2 est un nombre partageable.

Q4 : **(a)** En s'inspirant de la *figure a* ci-dessus, montrer que le nombre 8 est un nombre partageable.
(b) Soit p un nombre entier naturel non nul, montrer que $(2p)^2 = (2p-2)^2 + 2^2(2p-1)$.
(c) Le nombre 2024 est-il partageable ? Si oui, proposer un partage qui l'illustre.
(d) Montrer alors que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est partageable.

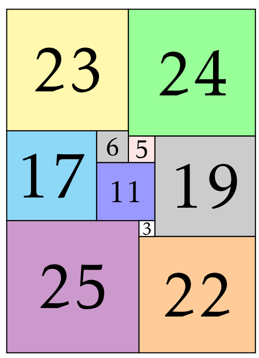
Q5 : **(a)** Soit p un nombre entier naturel non nul, montrer que $(3p)^2 = (3p-3)^2 + 3^2(2p-1)$.
(b) Construire alors une figure qui montre que 15 est partageable.

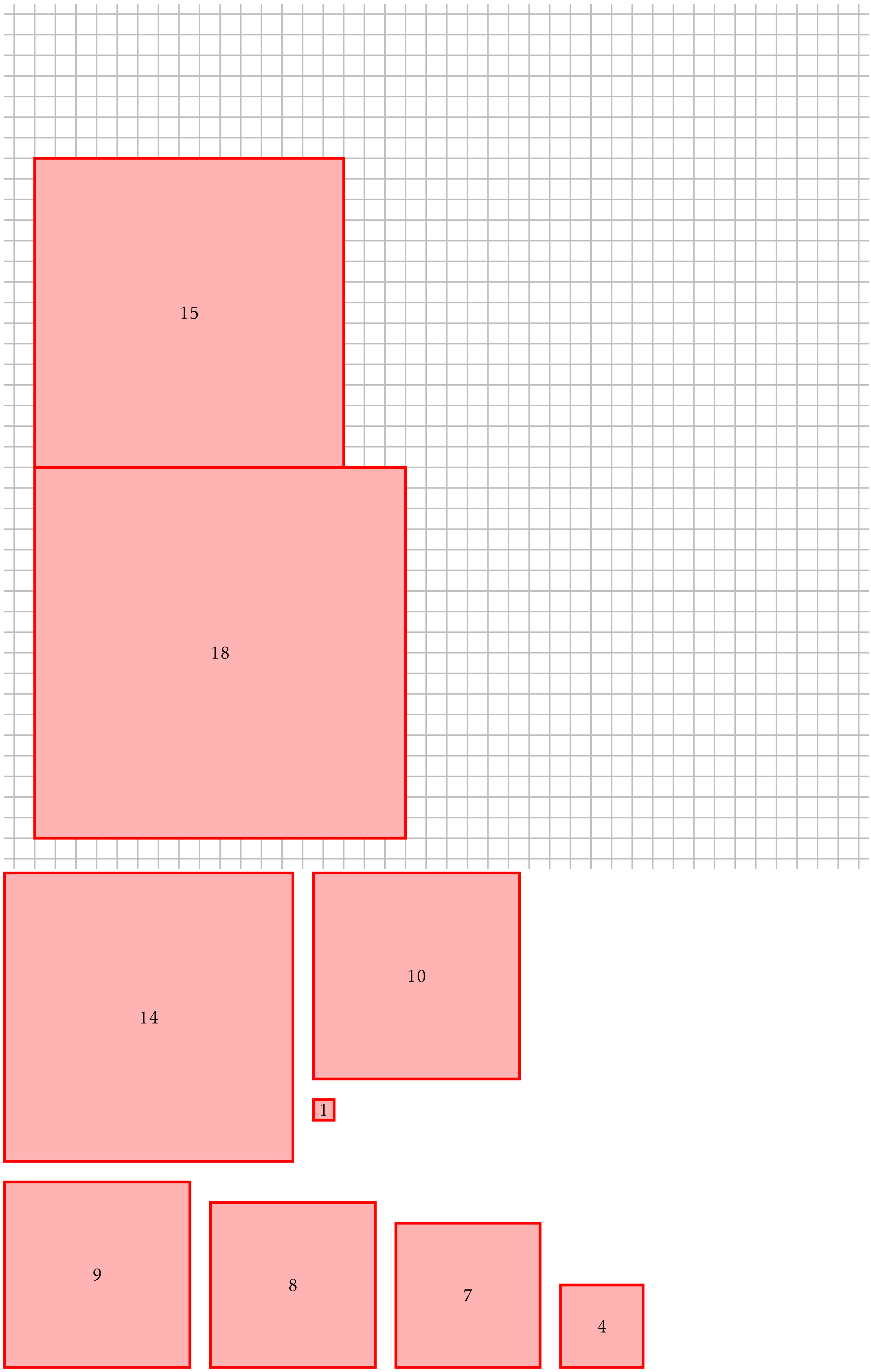
Partie 2 - Partage de rectangles.

On appelle *rectangle parfait* un rectangle composé de carrés dont les mesures des côtés sont des nombres entiers tous distincts.
Ci-contre, un exemple où les nombres entiers inscrits à l'intérieur de chaque carré indiquent la longueur du côté du carré.
L'objectif de cette partie est de construire un autre rectangle parfait, composé celui-ci de neuf carrés dont les mesures des côtés sont

1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18

Il s'agit du plus petit rectangle parfait possible.
On donne en annexe, un des côtés de ce rectangle. Grâce aux carrés fournis qui composent le partage de ce rectangle, terminer alors la partition de celui-ci. On expliquera la démarche, même si elle n'aboutit pas. On pourra découper et coller les carrés fournis sur le début de rectangle.

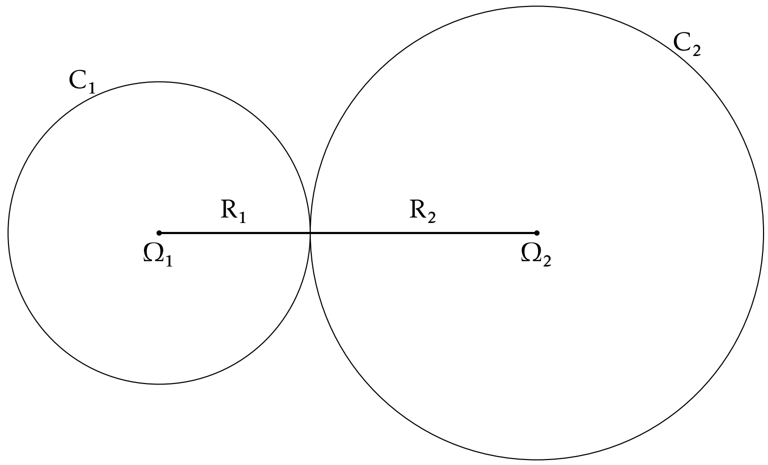



15
18
14
10
1
9
8
7
4

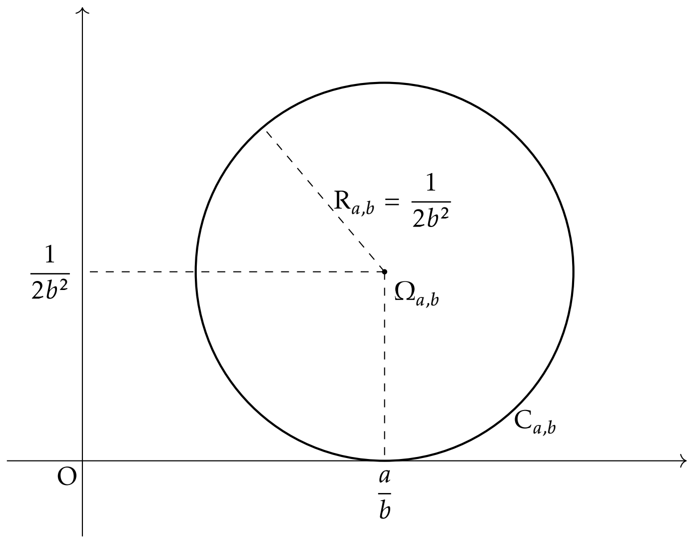
Exercice 2. Cercles de Ford

On rappelle que la distance entre deux nombres réels a et b est le nombre $|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geqslant b \\ b-a & \text{si } a \leqslant a \end{cases}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit C_1 et C_2 deux cercles de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2.
On dit que C_1 et C_2 sont *tangents extérieurement* si et seulement si la distance entre Ω_1 et Ω_2 est égale à la somme des rayons des deux cercles c'est-à-dire $\Omega_1\Omega_2 = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2$.



Soient a et b deux nombres entiers naturels, avec b non nul. On rappelle qu'une fraction est irréductible si le plus grand commun diviseur de a et b est 1. Autrement dit que a et b n'ont que 1 comme diviseur commun.
Étant donné une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, on note $\mathrm{C}_{a,b}$ le cercle de centre $\Omega_{a,b}\left(\frac{a}{b}; \frac{1}{2b^2}\right)$ et de rayon $\mathrm{R}_{a,b} = \frac{1}{2b^2}$.
Le cercle $\mathrm{C}_{a,b}$ est appelé le *cercle de Ford associé à la fraction irréductible* $\frac{a}{b}$.



Q1 : **(a)** Déterminer les centres $\Omega_{0,1}$, $\Omega_{1,2}$ et $\Omega_{1,1}$ les rayons $\mathrm{R}_{0,1}$, $\mathrm{R}_{1,2}$ et $\mathrm{R}_{1,1}$ des cercles de Ford $\mathrm{C}_{0,1}$, $\mathrm{C}_{1,2}$ et $\mathrm{C}_{1,1}$ respectivement associés aux fractions $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1}$.

(b) Représenter dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 8 cm, les cercles $\mathrm{C}_{0,1}$, $\mathrm{C}_{1,2}$ et $\mathrm{C}_{1,1}$.

(c) Montrer que les cercles $\mathrm{C}_{0,1}$, $\mathrm{C}_{1,2}$ et $\mathrm{C}_{1,1}$ sont deux à deux tangents extérieurement.

(d) On rappelle qu'une droite (d) est tangente à un cercle C de centre A et de rayon $r > 0$, si la distance du point A à la droite (d) est égale à r. Autrement dit, si $\mathrm{AH} = r$ où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Soit une fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Montrer que le cercle $\mathrm{C}_{a,b}$ est tangent à l'axe des abscisses en un point que l'on précisera.

Q2 : Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles différentes. On note D la distance entre $\Omega_{a,b}$ et $\Omega_{c,d}$

(a) Montrer que

$$\mathrm{D}^2 - \left(\mathrm{R}_{a,b} + \mathrm{R}_{c,d}\right)^2 = \frac{(ad-bc)^2}{b^2d^2} - \frac{1}{b^2d^2}$$

(b) En déduire que les cercles de Ford $\mathrm{C}_{a,b}$ et $\mathrm{C}_{c,d}$ sont tangents extérieurement si, et seulement si, $|ad-bc| = 1$ et que, dans les autres cas, l'intersection de $\mathrm{C}_{a,b}$ et $\mathrm{C}_{c,d}$ est vide.

Q3 : Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $|ad - bc| = 1$.

On veut montrer que $\frac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que l'on peut simplifier la fraction, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n > 1$ qui divise à la fois $a + c$ et $b + d$.

(a) Calculer $|(a+c)d - (b+d)c|$

(b) Aboutir à une contradiction et conclure.

Q4 : Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $|ad - bc| = 1$ et $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

On veut montrer qu'il existe une fraction irréductible $\frac{u}{v}$ telle que $\frac{a}{b} < \frac{u}{v} < \frac{c}{d}$ et tel que le cercle de Ford associé à $\frac{u}{v}$ soit tangent extérieurement à la fois à $C_{a,b}$ et $C_{c,d}$.

(a) Justifier que $ad - bc = -1$

(b) Soit une fraction irréductible $\frac{u}{v}$ telle que $\frac{a}{b} < \frac{u}{v} < \frac{c}{d}$.

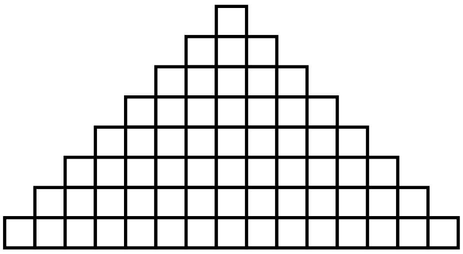
On suppose que $C_{u,v}$ est tangent extérieurement à la fois à $C_{a,b}$ et $C_{c,d}$. Montrer que $\begin{cases} av - bu = -1 \\ cv - du = 1 \end{cases}$

(c) Résoudre le système et en déduire que $u = a + c$ et $v = b + d$

(d) Conclure.

Exercice 3. Pyramides de nombres

On construit une pyramide en superposant des cases comme sur la figure ci-dessous :

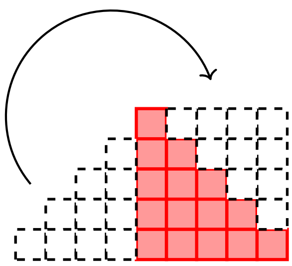


L'étage supérieur est constitué d'une case et chaque étage possède deux cases de plus que l'étage situé juste au-dessus.

Partie 1 - Pyramides

Q1 : Combien de cases contient une telle pyramide de 5 étages ?

Q2 : En vous inspirant du schéma ci-dessous, calculer le nombre de cases contenues dans une pyramide de 10 étages.



Q3 : Soit n, un entier naturel non nul.

Quel est, en fonction de n, le nombre de cases contenues dans une pyramide de n étages ?

Partie 2 - Numérotation

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul quelconque.

On suppose que la pyramide est infinie et on y place les entiers selon la disposition suivante :

			…	C_{-4}	C_{-3}	C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	…		
L_1								1							
L_2							2	3	4						
L_3						5	6	7	8	9					
L_4					10	11	12	13	14	15	16				
L_5				17	18	19	20	21	22	23	24	25			
⋮			26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
		37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
	…	…													

Q1 : Numérotation des lignes

(a) Les lignes sont numérotées à partir du haut. La première ligne qui contient le nombre 1 sera notée ligne L_1 , celle juste en dessous L_2 , etc. Quel est le dernier nombre de la ligne L_{10} ?

(b) Exprimer, en fonction de n, le dernier nombre de la ligne L_n.

Q2 : Numérotation des colonnes

On nomme la colonne centrale C_0.

On nomme les colonnes à sa droite C_1, C_2, C_3, … et les colonnes à sa gauche C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, …

(a) Combien la Ligne L_4 comporte-t-elle de cases ? Quels noms portent les colonnes qui la composent ?

(b) Quel nom porte la colonne qui débute à la première case de la ligne L_n ?

(c) Quel nom porte la colonne qui débute à la dernière case de la ligne L_n ?

(d) Quel est le premier nombre de la colonne C_{12} ?

(e) Quel est le premier nombre de la colonne C_n ?

(f) Quel est le premier nombre de la colonne C_{-10} ?

(g) Quel est le premier nombre de la colonne C_{-n} ?

(h) Quel nom porte la colonne qui commence par le nombre 530 ?

Q3 : Intersections

(a) Quel nombre se trouve à l'intersection de la colonne C_0 et de la ligne L_{14} ?

(b) Exprimer en fonction de n, le nombre se trouvant à l'intersection de la colonne C_0 et de la ligne L_n ?

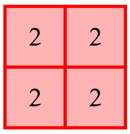
(c) A l'intersection de quelle ligne et de quelle colonne trouverons-nous le nombre 2024 ? Et le nombre 11111 ?

Besançon 2024
(Correction)

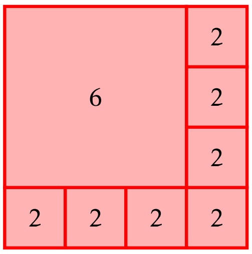
Corrigé de l'exercice 1 : Partages de carrés et de rectangles

Partie 1 - Partage de carrés.

Q1 : On peut partager le carré de côté 3 en 9 carrés de côtés 1 ou 1 carré de côté 3, ou un carré de côté 2 et 5 carrés de côtés 1. Le nombre 3 n'est pas partageable.

Q2 :


Q3 : On partage le carré de côté p^2 en p^2 de côtés p.

Q4 : **(a)**


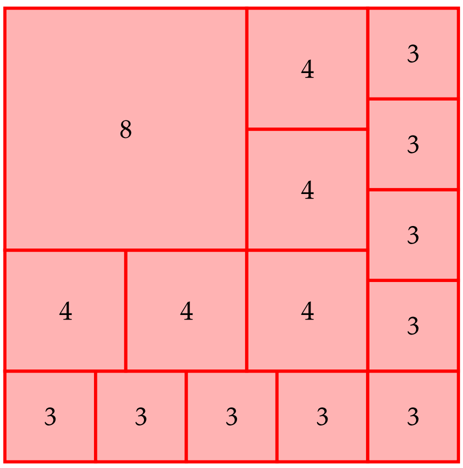
(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(2p-2)^2 + 2^2(2p-1) = 4p^2 - 8p + 4 + 8p - 4 = 4p^2 = (2p)^2$

(c) $(2 \times 1012)^2 = 2022^2 + 2^2 \times 2023$ d'après la question précédente. Ce qui nous permet de partager 2024 en 1 carré de côté 2022 et 2023 carrés de côtés 2, à la maière du carré de côté 8.

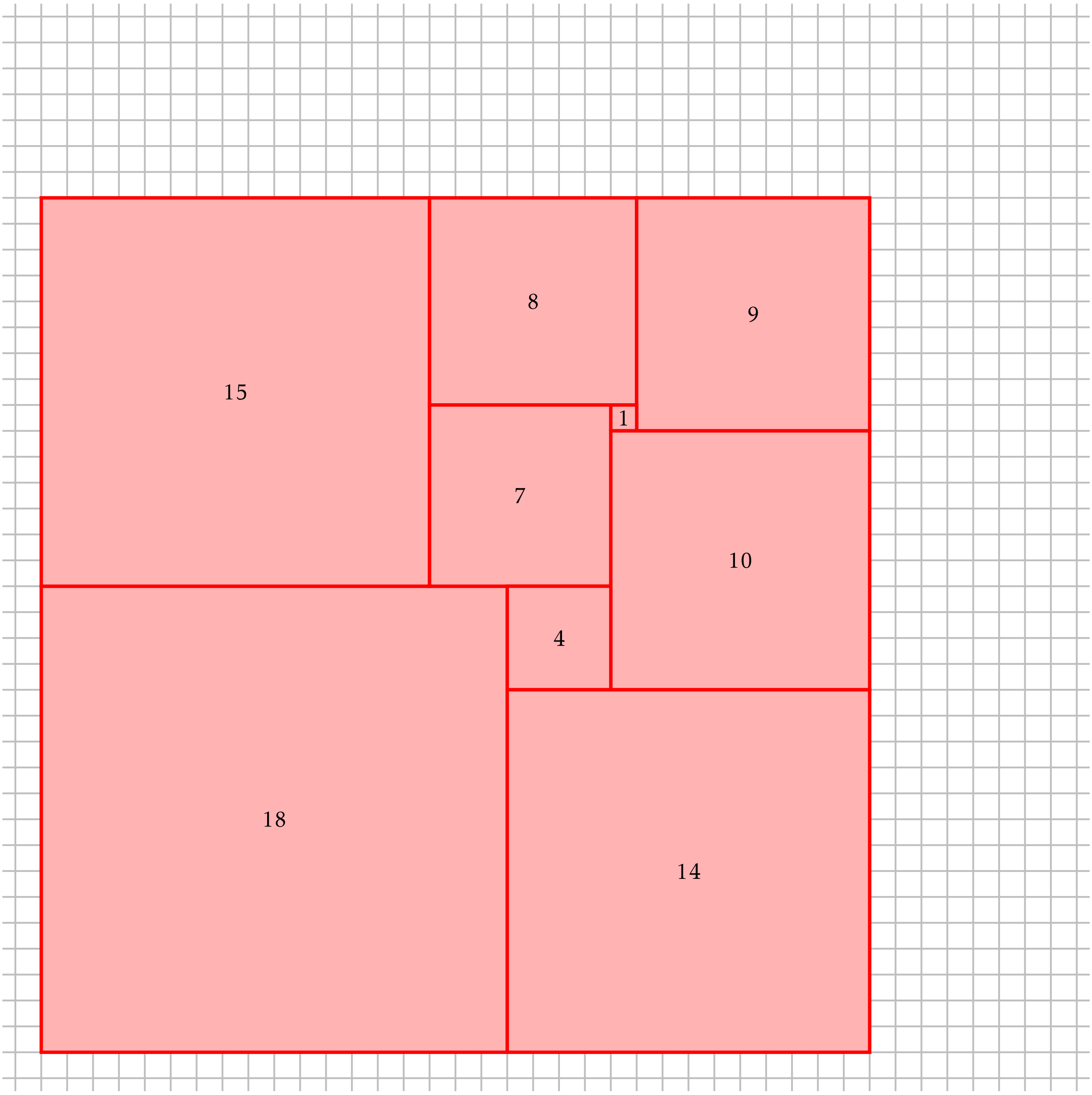
(d) D'après la formule $(2p)^2 = (2p-2)^2 + 2^2(2p-1)$, on peut partager $2p$ en 1 carré de côté $2p-2$ et $2p-1$ carrés de côtés 2.

Q5 : **(a)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(3p-3)^2 + 3^2(2p-1) = 9p^2 - 18p + 9 + 18p - 9 = 9p^2 = (3p)^2$

(b) Avec $p = 5$, $15^2 = 12^2 + 9 \times 9 = (2 \times 6)^2 + 9 \times 9 = 4^2 + 5 \times 2^2 + 9 \times 9$.

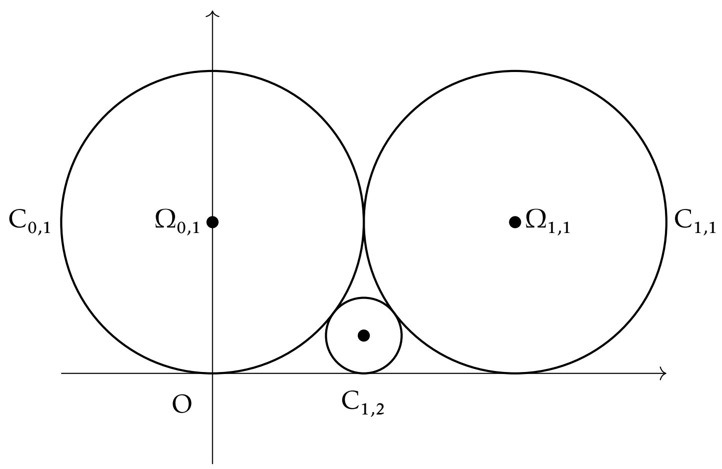


Partie 2 - Partage de rectangles.



Corrigé de l'exercice 2 : Cercles de Ford

Q1 : **(a)** $C_{0,1} : \Omega_{0,1}\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ et $R_{0,1} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad C_{1,2} : \Omega_{1,2}\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}\right)$ et $R_{1,2} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad C_{1,1} : \Omega_{1,1}\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ et $R_{1,1} = \dfrac{1}{2}$



(b)

(c) $\Omega_{0,1}\Omega_{1,2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{64}} = \sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = R_{0,1} + R_{1,2}$

donc $C_{0,1}$ et $C_{1,2}$ sont tangents extérieurement.

$$\Omega_{1,1}\Omega_{1,2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \mathrm{R}_{1,1}+\mathrm{R}_{1,2}$$

donc $\mathrm{C}_{1,1}$ et $\mathrm{C}_{1,2}$ sont tangents extérieurement.

$$\Omega_{0,1}\Omega_{1,1} = \sqrt{(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \mathrm{R}_{0,1}+\mathrm{R}_{1,1}$$

donc $\mathrm{C}_{0,1}$ et $\mathrm{C}_{1,1}$ sont tangents extérieurement.

(d) Le centre a pour ordonnée la même valeur que le rayon, donc le cercle est tangent à l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{a}{b};0\right)$.

Q2 : **(a)** $\mathrm{D}^2-(\mathrm{R}_{a,b}+\mathrm{R}_{c,d})^2 = \Omega_{a,b}\Omega_{c,d}^2-(\mathrm{R}_{a,b}+\mathrm{R}_{c,d})^2 = \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)^2+\left(\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2d^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2d^2}\right)^2$

$= \left(\frac{ad-bc}{bd}\right)^2+\left(\frac{1}{2b^2}\right)^2-2\frac{1}{2b^2}\frac{1}{2d^2}+\left(\frac{1}{2d^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2b^2}\right)^2-2\frac{1}{2b^2}\frac{1}{2d^2}-\left(\frac{1}{2d^2}\right)^2 = \frac{(ad-bc)^2}{b^2d^2}-\frac{1}{b^2d^2}$

(b) $\mathrm{D}\geqslant 0$ et $\mathrm{R}_{a,b}+\mathrm{R}_{c,d}\geqslant 0$, on a donc :

$\mathrm{D}=\mathrm{R}_{a,b}+\mathrm{R}_{c,d} \iff \mathrm{D}^2-(\mathrm{R}_{a,b}+\mathrm{R}_{c,d})^2=0 \iff (ad-bc)^2=1 \iff |ad-bc|=1$

Q3 : **(a)** $|(a+c)d-(b+d)c| = |ad-bc+cd-cd| = 1$

(b) On a $n \mid (a+c)$ et $n \mid (b+d)$ donc il existe $(k,k')\in\mathbb{N}^2$ tel que $a+c=kn$ et $b+d=k'n$.
Ce qui donne $|(a+c)d-(b+d)c|=1 \iff n|kd-k'c|=1$ donc $n=1$, absurde.

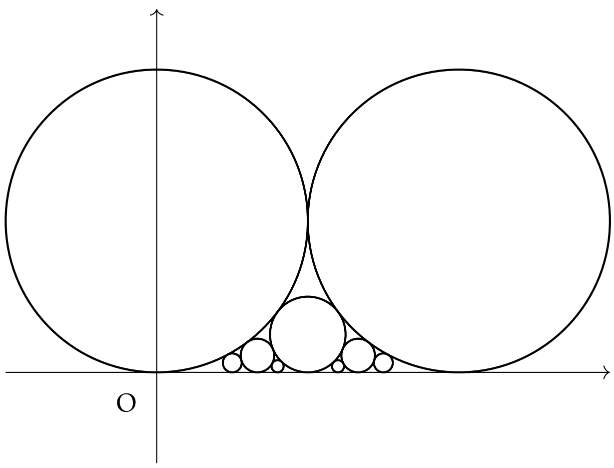
Q4 : **(a)** $(a,b,c,d)\in(\mathbb{N}^*)^4$ donc $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \iff ad-bc<0$ donc $ad-bc=-1$.

(b) $\mathrm{C}_{u,v}$ est tangent extérieurement à la fois à $\mathrm{C}_{a,b}$ et $\mathrm{C}_{c,d}$ donc, d'après 2b, $|av-bu|=1$ et $|ud-cv|=1$.
Or $\frac{a}{b}<\frac{u}{v}<\frac{c}{d}$, donc, d'après la question précédente, $av-bu=-1$ et $ud-cv=-1 \iff cv-du=1$.

(c) $\begin{cases} av-bu=-1 & (\ell_1)\\ cv-du=1 & (\ell_2)\end{cases} \iff \begin{cases} (ad-cb)u=-c-a & (c\ell_1-a\ell_2)\\ (ad-bc)v=-d-b & (d\ell 1-b\ell_2)\end{cases} \iff \begin{cases} u=a+c\\ v=b+d\end{cases}$ car $ab-bc=-1$

(d) Faisons la synthèse des questions précédentes. Posons $u=a+c$ et $v=b+d$. On a alors $\frac{u}{v}$ est irréductible, et $\frac{a}{b}<\frac{u}{v}<\frac{c}{d}$ car $\frac{u}{v}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}=\frac{1}{b(b+d)}>0$ et $\frac{u}{v}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{d(b+d)}=\frac{-1}{d(b+d)}<0$.
De plus comme $|av-bu|=1$ et $|ud-cv|=1$, on a d'après 2b, $\mathrm{C}_{u,v}$ est tangent extérieurement à la fois à $\mathrm{C}_{a,b}$ et $\mathrm{C}_{c,d}$.

Remarque : cela nous donne un moyen itératif de construire une suite de cercles de Ford.



Corrigé de l'exercice 3 : Pyramides de nombres

Partie 1 - Pyramides

Q1 : Comme est définie la pyramide, on pourrait définir une suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+2\end{cases}$ qui est arithmétique de raison 2, et la question revient à calculer la somme des 5 premiers termes de (u_n) soit :

$u_1+u_2+\cdots+u_5 = 5\times\frac{u_1+u_5}{2} = 5\times\frac{1+1+2(5-1)}{2} = 25$

Q2 : En s'aidant du schéma on peut trouver $10\times 10=100$

Q3 : À l'aide de la suite ou du schéma on trouve n^2.

Partie 2 - Numérotation

Q1 : Numérotation des lignes

(**a**) Comme nous l'avons démontré dans la partie précédente, ce nombre est $10^2 = 100$.

(**b**) Comme nous l'avons démontré dans la partie précédente, ce nombre est n^2.

Q2 : Numérotation des colonnes

(**a**) La ligne L_4 comporte u_4 cases, soit $1 + 2(4 - 1) = 7 = 2 \times 3 = 1$. Les colonnes portent donc les noms C_{-3}, $C_{-2}, \dots, C_3$.

(**b**) La ligne L_n comporte u_n cases, soit $1 + 2(n - 1) = 2n + 1$ cases, donc les colonnes portent les noms C_{-n}, $C_{-n+1}, \dots, C_n$.

(**c**) C_n.

(**d**) C'est l'entier 13^2 soit 169.

(**e**) C'est l'entier $(n + 1)^2$ soit $n^2 + 2n + 1$.

(**f**) C'est l'entier suivant 11^2 soit 122.

(**g**) C'est l'entier suivant n^2 soit $n^2 + 1$.

(**h**) 530 est encadré par les carrés $529 = 23^2$ et 576, donc c'est le premier nombre de la ligne 24 et donc de la colonne C_{-23}

Q3 : Intersections

(**a**) $13^2 + 14 = 169 + 14 = 183$

(**b**) $(n - 1)^2 + n = n^2 - n + 1$

(**c**) 2024 est encadré par les carrés de 44 et 45 et $45^2 = 2025 = 2024 + 1$ donc 2024 est à l'intersection de la ligne 45 et de la colonne C_{43}.

11111 est encadré par les carrés de 105 et 106 et $105^2 = 11025 = 11111 - 86$ donc 11111 est à l'intersection de la ligne 106 et de la colonne $C_{86-106} = C_{-20}$.

	C_{-24}	C_{-23}	C_{-22}	C_{-21}	C_{-20}	C_{-19}	C_{-18}	C_{-17}	C_{-16}	C_{-15}	C_{-14}	C_{-13}	C_{-12}	C_{-11}	C_{-10}	C_{-9}	C_{-8}	C_{-7}	C_{-6}	C_{-5}	C_{-4}	C_{-3}	C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	
L_1																										1																								
L_2																									2	3	4																							
L_3																								5	6	7	8	9																						
L_4																							10	11	12	13	14	15	16																					
L_5																						17	18	19	20	21	22	23	24	25																				
L_6																					26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36																			
L_7																				37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49																		
L_8																			50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64																	
L_9																		65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81																
L_{10}																	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100															
L_{11}																101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121														
L_{12}															122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144													
L_{13}														145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169												
L_{14}													170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196											
L_{15}												197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225										
L_{16}											226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256									
L_{17}										257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289								
L_{18}									290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324							
L_{19}								325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361						
L_{20}							362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400					
L_{21}						401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441				
L_{22}					442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484			
L_{23}				485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529		
L_{24}			530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	
		577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625