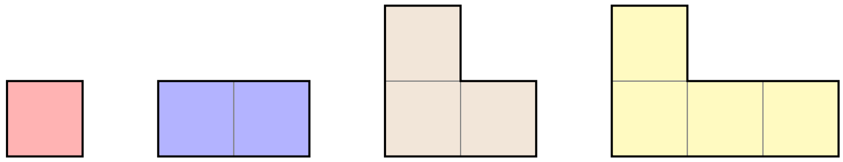
Exercice 1. Polyominos

Un *polyomino* est une figure obtenue par un assemblage de carrés identiques :

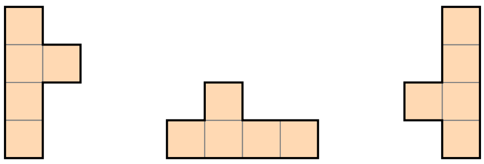
- Les différents carrés constituant un polyomino ne peuvent se chevaucher.
- Par ailleurs, quand deux carrés sont en contact, ils doivent se toucher par un côté complet.

En fonction du nombre de carrés constituant un polyomino, on parlera de monomino (un seul carré), de domino (deux carrés), triomino (trois carrés), et ainsi de suite.



Monomino Domino Triomino Tétramino

Deux polyominos sont considérés comme identiques s'ils sont « superposables » (par rotation, symétrie, translation). Par exemple, les trois pentaminos ci-contre sont identiques.



Partie 1

Le tableau ci-contre donne le nombre p_{N} de polyominos différents en fonction du nombre n de carrés le constituant.

n	1	2	3	4	5
P_n	1	1	2	5	

Q1 : Montrer que $\text{P}_4 = 5$.

Q2 : Compléter le tableau en déterminant P_5.

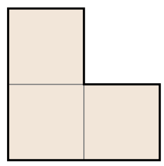
Q3 : Pour tout entier naturel non nul n, P_n est-il une fonction affine de n ?

Q4 : De même, peut-on déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\text{P}_n = an^2 = bn + c$?

Partie 2

Pour m et n entiers naturels non nuls, notons $\text{R}(m, n)$ le rectangle constitué du nombre carrés identique à celui d'un polyomino donné : m carrés dans sa longueur et n carrés dans sa largeur.
Par exemple $\text{R}(6, 2)$ pour un polyomino constitué de 8 carrés.
On désigne par $\text{C}(n)$ le carré $\text{R}(n, n)$.

On considère un triomino en forme de L comme représenté ci-contre.

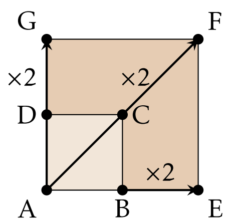


Q1 : **(a)** Montrer que l'on peut construire un rectangle en assemblant des triominos en forme de L.
On dira alors qu'on a *pavé* ce rectangle à l'aide de triominos L et que ce rectangle est *pavable* par le triomino L.

(b) En déduire qu'on peut paver un carré C(6) à l'aide de triominos en forme de L.

(c) À l'aide de triominos en forme de L, déduire de la question précédente un pavage d'un agrandissement de facteur 6 du triomino en forme de L.

Exemple d'un agrandissement de facteur 2 :
Ici le carré AEFG est un agrandissement de facteur 2 du carré ABCD.
On remarquera les alignements nécessaires pour parler d'agrandissement.



Q2 : (**a**) À l'aide de triominos en forme de L, trouver un pavage d'un agrandissement de facteur 2 du triomino en forme de L.

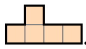
(**b**) Soit k un entier naturel non nul.
À l'aide de triominos en forme de L, en déduire une méthode pour construire un pavage d'un agrandissement de facteur 2^k d'un triomino en forme de L.

Partie 3

On dit qu'un polyomino P est :

- ▷ *rectifiable* lorsqu'il existe un rectangle pavable avec le polyomino P ;
- ▷ *auto-pavant* lorsqu'il existe un agrandissement de lui-même pavable avec ce polyomino P.

Q1 : Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 3$. Montrer qu'il existe toujours un polyomino rectifiable résultant d'un assemblage de n carrés et qui ne soit pas un rectangle.

Q2 : Paver un rectangle $R(10, 5)$ par un pentamino de forme . Que peut-on en déduire ?

Q3 : Donner un pentamino non rectifiable en expliquant pourquoi il ne vous semble pas rectifiable

Q4 : On considère un polyomino P rectifiable et l'on suppose que ce polyomino pave le rectangle $R(m, n)$.

(**a**) Expliquer comment obtenir un pavage du rectangle $R(m \times n, m)$ à partir du pavage de $R(m, n)$.

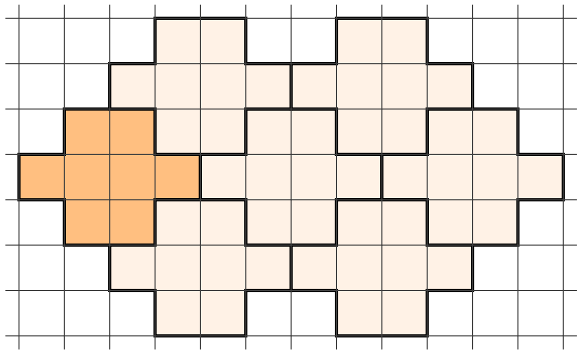
(**b**) En déduire un pavage du carré $C(m \times n)$.

(**c**) Montrer qu'il est alors possible d'obtenir un agrandissement du polyomino initial selon un facteur $m \times n$.

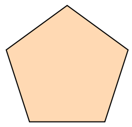
(**d**) En déduire une propriété pour les polyominos rectifiables.

Partie 4

On dit qu'un polygone est *pavant* lorsqu'un ensemble de ses configurations permet de paver le plan (une application des polygones pavants est celle de pouvoir carreler une pièce plane avec des carreaux ayant pour forme celle du polygone, quitte à faire quelques découpages d'ajustement sur les bords).



Hexamino pavant

Q1 : Montrer qu'un pentagone régulier n'est pas pavant. 

Q2 : Montrer que tout polyomino rectifiable est pavant.

Q3 : On admet que la proposition suivante est vraie : *Si un polyomino est auto-pavant alors il est pavant*.
Sa réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. Triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien tout triplet $(a; b; c)$ d'entiers naturels strictement positifs,tels que : $a^2 + b^2 = c^2$
Ces triplets de nombres peuvent être associés aux longueurs des côtés d'un triangle rectangle.
Dans cet exercice, on s'intéresse à une méthode pour rechercher de tels triplets.
Remarque : on de différenciera pas les triplets $(a; b; c)$ et $(b; a; c)$.

Partie 1 : Premiers triplets pythagoriciens.

Q1 : Montrer que le triplet $(3; 4; 5)$ est un triplet pythagoricien.

Q2 : Montrer que, pour tout entier naturel $n > 0$, le triplet $(3n; 4n; 5n)$ est un triplet pythagoricien.

Q3 : Existe-t-il un nombre fini de triplets pythagoriciens ?

Q4 : (**a**) Montrer que le triplet $(10; 24; 26)$ est un triplet pythagoricien.

(b) Est-il proportionnel au triplet $(3; 4; 5)$?

Q5 : On considère un triplet pythagoricien $(a; b; c)$ tel que a, b et c soient divisibles par un même nombre entier strictement positif d.

Montrer que le triplet $\left(\dfrac{a}{d}; \dfrac{b}{d}; \dfrac{c}{d}\right)$ est également un triplet pythagoricien.

Q6 : On dit que le triplet pythagoricien $(a; b; c)$ est une forme réduite si les trois entiers a, b et c ne sont pas divisibles par un même nombre entier naturel autre que 1.

Par exemple, le triplet $(3 ; 4 ; 5)$ est la forme réduite du triplet $(9 ; 12 ; 15)$ car les entiers $3 ; 4$ et 5 n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Quelle est la forme réduite du triplet $(10; 24; 26)$?

On appellera par la suite famille d'un triplet pythagoricien $(a; b; c)$ de forme réduite, l'ensemble des triplets pythagoriciens $(an; bn; cn)$ pour tout entier $n > 0$.

Partie 2 : Recherche de triplets pythagoriciens

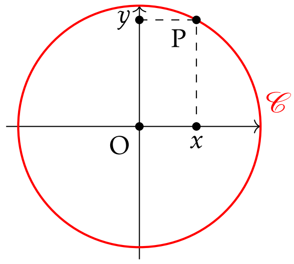
Dans la première partie, deux familles de triplets pythagoriciens ont été découvertes.

Afin d'en expliciter de nouvelles, on se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on s'intéresse aux points de coordonnées rationnelles du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Un point est dit de coordonnées rationnelles si son abscisse et son ordonnée sont des nombres rationnels, c'est-à-dire pouvant s'écrire comme quotient d'un entier naturel par un entier naturel non nul.

On rappelle qu'une équation du cercle $\mathscr{C}$ est $x^2 + y^2 = 1$.

Ce qui signifie qu'un point P de coordonnées $(x; y)$ appartient à $\mathscr{C}$, si, et seulement si $x^2 + y^2 = 1$.



Q1 : On considère des entiers p, p', q, q' strictement positifs.

Montrer que le point de coordonnées $\left(\dfrac{p}{q}; \dfrac{p'}{q'}\right)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$, si, et seulement si le triplet $(pq', p'q, qq')$ est un triplet pythagoricien.

Q2 : **(a)** Montrer que le point de coordonnées $\left(\dfrac{8}{17}; \dfrac{15}{17}\right)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

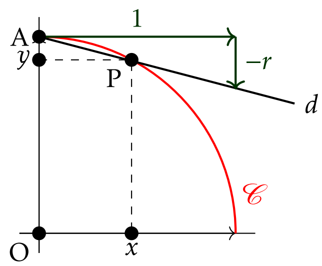
(b) En déduire une nouvelle famille de triplets pythagoriciens.

Q3 :

On considère désormais une droite d, passant par le point $\mathrm{A}(0; 1)$ et de coefficient directeur $-r$ où r est un nombre rationnel avec $0 < r < 1$.

Cette droite est sécante avec le quart du cercle $\mathscr{C}$ (voir ci-contre).

L'intersection est donc un point P de coordonnées $(x; y)$ avec x dans $]0; 1]$ et y dans $[0; 1[$.



(a) Montrer que les coordonnées $(x; y)$ vérifient $\left\{\begin{array}{l} y = 1 - xr \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right.$

(b) En déduire que le couple $(x; y)$ est solution de $\left\{\begin{array}{l} y = 1 - xr \\ x = \dfrac{2r}{1 + r^2} \end{array}\right.$

(c) Conclure que les coordonnées du point d'intersection P de la droite d et du cercle $\mathscr{C}$ s'écrivent

$$\mathrm{P}\left(\frac{2r}{1 + r^2}; \frac{1 - r^2}{1 + r^2}\right).$$

(d) En rappelant que r est un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1, montrer que le couple $\left(\dfrac{2r}{1 + r^2}; \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2}\right)$ est un couple de nombres rationnels strictement positifs.

Q4 : **(a)** En prenant $r = \dfrac{5}{7}$, déterminer un nouveau triplet pythagoricien.

(b) Est-ce une forme réduite ? Si non, la calculer.

(c) À quelle valeur de r correspond le couple $\left(\frac{8}{17}; \frac{15}{17}\right)$?

Partie 3 : Des triplets pythagoriciens réduits.

Dans cette partie, on suppose que r est écrit sous la forme d'une fraction irréductible, c'est-à-dire sous la forme $r = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux, et on suppose en plus que $p < q$.

Q1 : En utilisant les résultats de la partie 2, montrer que le triplet $(2pq; q^2-p^2; q^2+p^2)$ est un triplet pythagoricien.

Q2 : Montrer que si p et q sont impairs alors le triplet $(2pq; q^2-p^2; q^2+p^2)$ n'est pas une forme réduite.

Q3 : Montrer que p et q sont de parité différente alors le triplet est écrit sous forme réduite.

Exercice inspiré de l'article *À la recherche des triplets pythagoriciens* de Issa, Victor, Sarem, William, dans Images des mathématiques, CNRS, 2023)

Exercice 3. Nombres possibles ou impossibles

Imaginons une monnaie appelée Zlork (ZL) qui n'aurait que deux types de pièces de valeurs respectives 3 ZL et 5 ZL.
Un entier naturel n sera dit *possible* si n Zlorks peuvent s'obtenir avec des pièces de 3 ZL et de 5 ZL.
Sinon, il sera dit *impossible*.
Par exemple, 11 est possible car 11 ZL s'obtient avec deux pièces de 3 ZL et une pièce de 5 ZL.

Partie 1

Q1 : Montrer que 21 est un nombre possible.

Q2 : Entourer (respectivement barrer) les nombres impossibles (respectivement possibles) de la grille ci-contre.

Q3 : Le plus grand des nombres impossibles est appelé le *nombre de Frobenius* de la situation, ici avec des pièces de 3 ZL et de 5 ZL. On le note F(3; 5).
À partir de la grille, conjecturer la valeur de F(3; 5).

Q4 : Expliquer pourquoi on ne peut pas affirmer que cett valeur proposée est la valeur de F(3; 5).

Q5 : Montrer que si trois entiers consécutifs sont possibles alors tous les suivants le sont aussi.

Q6 : Déduire de la question précédente la valeur de F(3; 5).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Partie 2

Une entreprise de restauration commercialise des nuggets sous trois formats : 6, 9 ou 20 nuggets.
Un entier naturel n sera dit *possible* si une commande de boîtes de 6, 9 ou 20 nuggets permet d'avoir exactement n nuggets. Sinon, il sera dit *impossible*.

Q1 : Montrer que 44 est un nombre possible.

Q2 : Entourer (respectivement barrer) les nombres impossibles (respectivement possibles) de la grille ci-contre.

Q3 : En déduire le nombre de Frobenius de cette situation, que l'on note F(6; 9; 20). Bien justifier.

Q4 : Afin de limiter le mécontentement des clients, cette enseigne a décidé de commercialiser aussi un format de 4 nuggets.
Déterminer le nouveau nombre de Frobenius de cette situation que l'on note F(4; 6; 9; 20).

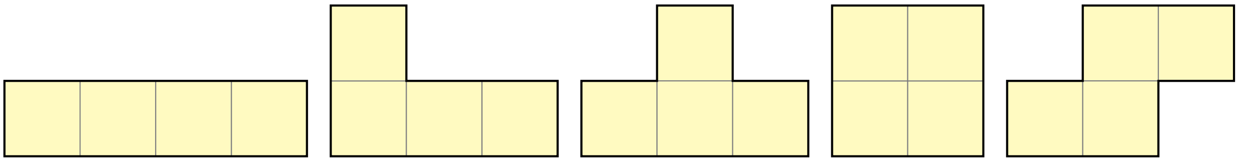
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44

Normandie 2024
(Correction)

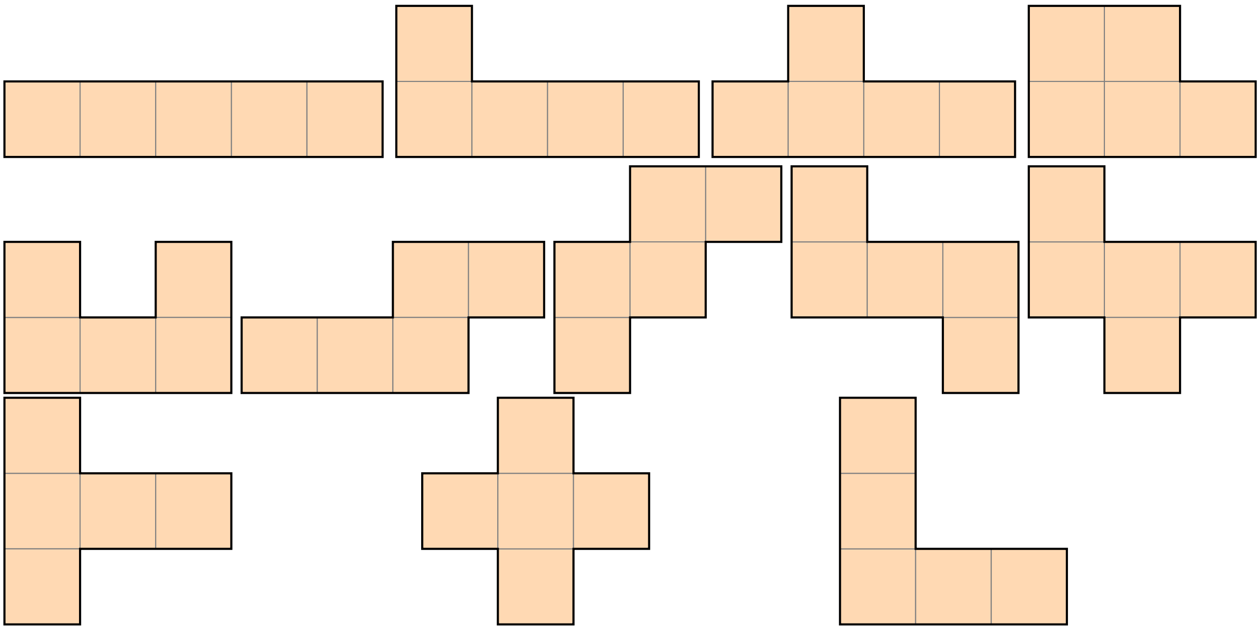
Corrigé de l'exercice 1 : Polyominos

Partie 1

Q1 :



Q2 :



Donc $P_5 = 12$

Q3 : Si P_n était affine en n alors elle serait constante égale à 1 d'après les deux premières valeurs. Or ce n'est pas le cas.

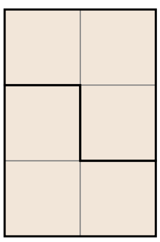
Q4 : Avec les trois premières valeurs, on aurait le système à résoudre (S) : $\left\{\begin{array}{ll} a+b+c=1 & (\ell_1) \\ 4a+2b+c=1 & (\ell_2) \\ 9a+3b+c=2 & (\ell_3) \end{array}\right.$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} a+b+c=1 & (\ell_1) \\ 3a+b=0 & (\ell_2 \leftarrow \ell_2-\ell_1) \\ 8a+2b=1 & (\ell_3 \leftarrow \ell_3-\ell_1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a+b+c=1 & (\ell_1) \\ 2a=1 & (\ell_2 \leftarrow \ell_3-2\ell_2) \\ 2b=-3 & (\ell_3 \leftarrow 8\ell_2-3\ell_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} c=2 \\ a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$$

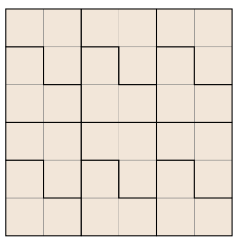
Or $\dfrac{1}{2}4^2 - \dfrac{3}{2}4 + 2 = 8 - 6 + 2 = 6 \neq 5$. Donc P_n n'est pas du second degré.

Partie 2

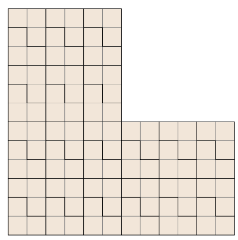
Q1 : (a)

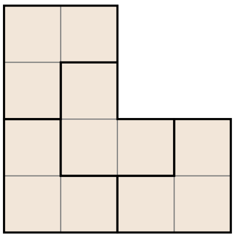


(b)



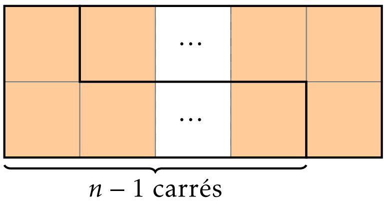
(c)

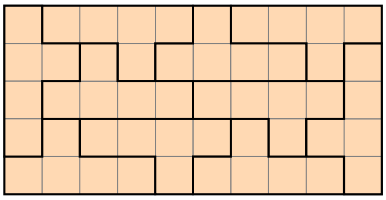


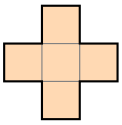
Q2 : (**a**) 

(**b**) Pour obtenir un agrandissement de ce triomino selon un facteur 2^k, il suffit de reproduire k fois le processus proposé à la réponse précédente.

Partie 3

Q1 : 

Q2 :  Le pentamino proposé est rectifiable.

Q3 : Chaque ajout d'un pentamino  ne permet pas de rester dans une surface rectangulaire donnée.

Q4 : (**a**) Pour obtenir un pavage du rectangle $\mathrm{R}(m, m \times n)$ à partir du pavage de $\mathrm{R}(m, n)$, il suffit de coller m rectangles $\mathrm{R}(m, n)$, le long du bord de longueur n.

(**b**) Pour obtenir un pavage du carré $\mathrm{C}(m \times n)$, on colle alors n rectangles $\mathrm{R}(m, m \times n)$ le long du bord de longueur $m \times n$.

(**c**) Une fois que l'on a obtenu un pavage d'un carré, il est facile d'obtenir un pavage de n'importe quelle figure.
En effet, il suffit de configurer les carrés $\mathrm{C}(m \times n)$ de la même manière que les carrés unitaires forment le polyomino de départ.

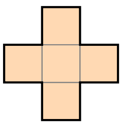
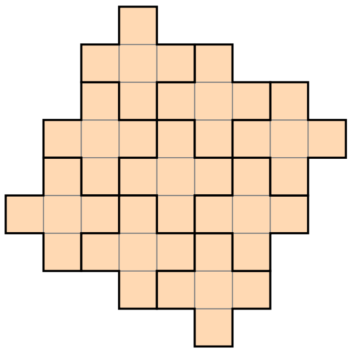
(**d**) Tout polyomino rectifiable est auto-pavant.

Partie 4

Q1 : L'angle intérieur de deux côtés consécutifs mesure 108° qui n'est pas un diviseur entier de 360°.

Q2 : Tout polyomino rectifiable pave un rectangle et les rectangles pavent le plan.

Q3 : (On se contentera de conjectures)

Non, il suffit de prendre le pentamino  qui est pavant. 

Pour ce pentamino, un seul type de pavage peut être généré. Or, pour avoir un agrandissement de lui-même, il faudrait pouvoir obtenir un alignement vertical ou horizontal de carrés unitaires, ce qui semble impossible.

Corrigé de l'exercice 2 : Triplets pythagoriciens

Partie 1 : Premiers triplets pythagoriciens.

Q1 : $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$

Q2 : $(3n)^2 + (4n)^2 = (3^2 + 4^2)n^2 = 25n^2 = (5n)^2$

Q3 : D'après la question précédente, on peut créer autant de triplets que de $n > 0$. Donc une infinité.

Q4 : **(a)** $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$

(b) Non car $\dfrac{3}{10} \neq \dfrac{4}{24}$

Q5 : $\left(\dfrac{a}{d}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{d}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{d^2} = \dfrac{c^2}{d^2} = \left(\dfrac{c}{d}\right)^2$

Q6 : $(5; 12; 13)$

Partie 2 : Recherche de triplets pythagoriciens

Q1 : Le point de coordonnées $\left(\dfrac{p}{q}; \dfrac{p'}{q'}\right)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$, si, et seulement si

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p'}{q'}\right)^2 = 1 \iff \frac{(pq')^2 + (p'q)^2}{q^2q'^2} = 1 \iff (pq')^2 + (p'q)^2 = (qq')^2$$

si, et seulement si le triplet $(pq', p'q, qq')$ est un triplet pythagoricien.

Q2 : **(a)** $\left(\dfrac{8}{17}\right)^2 + \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{64+225}{17^2} = \dfrac{289}{17^2} = 1$

(b) La famille $(8n; 15n, 17n)$.

Q3 : **(a)** La droite d, passant par le point $A(0; 1)$ et de coefficient directeur $-r$ a pour équation $y = -rx + 1$ et le cercle a pour équation $x^2 + y^2 = 1$, d'où le système.

(b) $x^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + (1 - xr)^2 = 1 \iff (1 + r^2)x^2 - 2xr = 0 \iff x = 0$ ou $x = \dfrac{2r}{1+r^2}$ mais $x \neq 0$

(c) $y = 1 - xr = 1 - \dfrac{2r^2}{1+r^2} = \dfrac{1 + r^2 - 2r^2}{1+r^2} = \dfrac{1-r^2}{1+r^2}$

(d) $1 + r^2 > 0$, $0 < r^2 < 1$ donc $0 < 1 - r^2 < 1$ et par suite $\left(\dfrac{2r}{1+r^2}; \dfrac{1-r^2}{1+r^2}\right)$ est un couple de nombres rationnels strictement positifs.

Q4 : **(a)** Avec $r = \dfrac{5}{7}$, on trouve $\left(\dfrac{2r}{1+r^2}; \dfrac{1-r^2}{1+r^2}\right) = \left(\dfrac{70}{74}; \dfrac{24}{74}\right)$, donc $(24\times74, 70\times74; 74\times74)$ d'où le triplet $(24; 70; 74)$.

(b) La forme réduite est $(12; 35; 37)$.

(c) On a $y = 1 - rx \iff r = \dfrac{1-y}{x}$ donc ici $r = \dfrac{2}{17} \times \dfrac{17}{8} = \dfrac{1}{4}$

Partie 3 : Des triplets pythagoriciens réduits.

Q1 : $(2r, 1 - r^2, 1 + r^2)$ est Pythagoricien, avec $r = \dfrac{p}{q}$ cela donne en multipliant par q^2, $(2pq; q^2 - p^2; q^2 + p^2)$.

Q2 : Si p et q sont impairs, alors p^2, q^2 aussi et donc $q^2 - p^2$ et $q^2 + p^2$ sont pairs, tout comme $2pq$. Donc ce n'est pas une forme, réduite.

Q3 : Supposons p et q de parités différentes et prenons n un diviseur de $2pq$, $q^2 - p^2$ et $q^2 + p^2$, alors n divise $q^2 - p^2$ impair donc est impair, et aussi $q^2 - p^2 + q^2 + p^2 = 2q^2$ donc divise q^2 donc divise q. De même n divise $q^2 - p^2 - q^2 - p^2 = -2p^2$ donc divise p^2 donc divise p. Or $\dfrac{p}{q}$ irréductible donc $n = 1$. Le triplet est sous forme réduite.

Corrigé de l'exercice 3 : Nombres possibles ou impossibles

Partie 1

Q1 : $21 = 3 \times 7$.

Q2 : Les nombres 1, 2, 4 et 7 sont les seuls nombres entourés. Les autres sont barrés.

Q3 : $F(3; 5) = 7$

Q4 : On n'a testé que les entiers de 1 à 100.

Q5 : Il suffit d'ajouter une pièce de 3ZL, à partir de n, $n + 1$ ou $n + 2$.

Q6 : 8, 9 et 10 sont possibles donc leurs trois suivants et ainsi de suite.

Partie 2

Q1 : $44 = 4 \times 6 + 20$.

Q2 : 22 nombres sont entourés : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 13 ; 14 ; 16 ; 17 ; 19 ; 22 ; 23 ; 25 ; 28 ; 31 ; 34 ; 37 ; 43. Les autres sont barrés.

Q3 : $F(6; 9; 20) = 43$. Pour cela, on montre que 44, 45, 46, 47, 48, 49 sont possibles. Il suffit d'ajouter une boîte de 6 pour obtenir les 6 suivants de ces six nombres et ainsi de suite.

Q4 : $F(4; 6; 9; 20) = 11$. Plusieurs méthodes possibles vu qu'il est forcément dans la liste précédente.