Exercice 1. Un problème d'aire qui ne manque pas d'air !

Dans un carré ABCD de côté 1, on considère une suite de cercles $(C_0, C_1, \ldots, Cn)$ de centres respectifs $(O_0, O_1, \ldots, O_n)$ et de rayons respectifs $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$, où n est un nombre entier naturel (voir Figure 1).
Les cercles $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ sont :

- tangents entre eux.
- tangents aux segments [AE] et [AF].

Le quart de cercle de centre A et de rayon 1 coupe le segment [AE] en H_0.
On définit A_n comme la somme des aires des disques délimités par les cercles $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ où n est un nombre entier naturel.

Le problème consiste à calculer la somme A des aires de tous les disques C_k, pour k entier naturel.

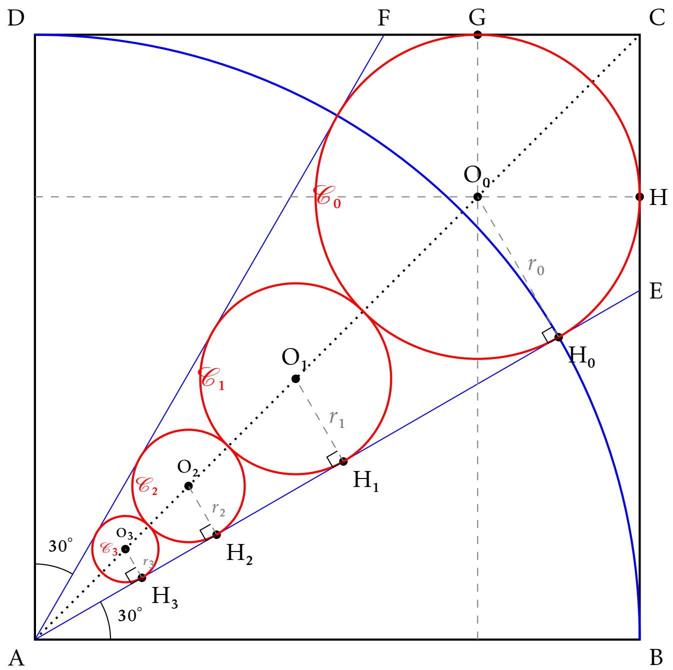


Figure 1 - Représentation géométrique partielle du problème

Partie 1 : Ne dépassons pas les bornes !

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement de l'aire A, comprise entre celle du disque délimité par le cercle C_0, désignée par A_{min} et celle de la zone AECF, désignée par A_{max} :

$$A_{min} \leqslant A \leqslant A_{max}.$$

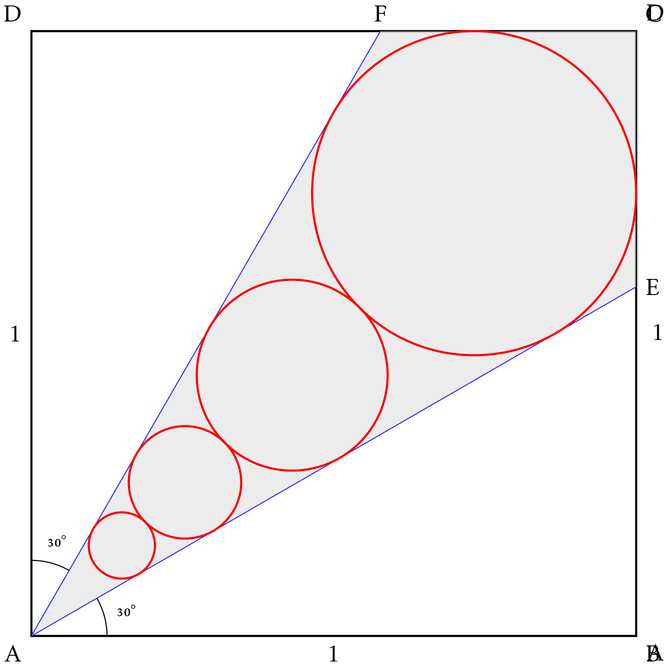


Figure 2 - Majorant : $A_{max} = A_{AECF}$

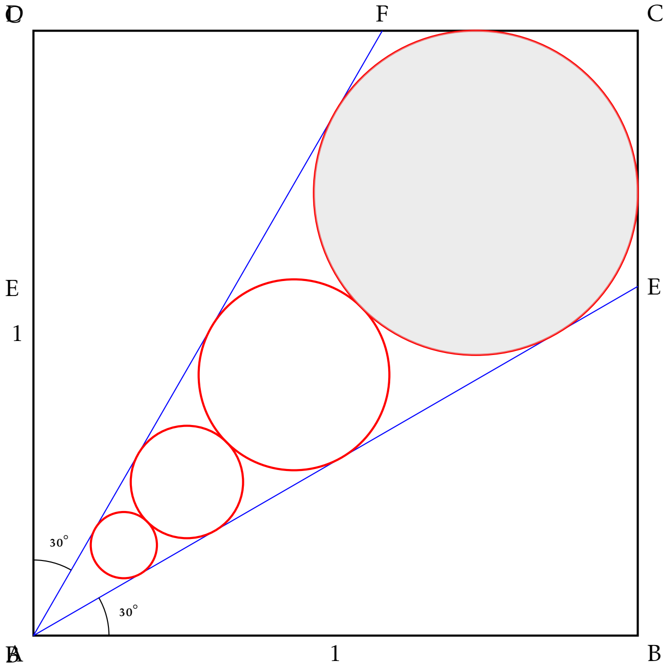


Figure 3 - Minorant : $A_{min} = A_{C_0}$

Q1 : Recherche d'un majorant :

(a) Montrer que : $BE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

On rappelle que : $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ où α est la mesure d'un angle d'un triangle rectangle.

(b) Calculer l'aire des triangles ABE et ADF.

(c) En déduire la valeur exacte de l'aire A_{max} de la zone AECF puis la valeur approchée par excès au centième.

Q2 : Recherche d'un minorant :

(a) Calculer la longueur AC en considérant le carré ABCD. En déduire que $0 \leqslant r_0 \leqslant \sqrt{2}$

(b) Déterminer O_0C en fonction de r_0, puis en déduire AO_0 en fonction de r_0.

On rappelle que H_0 est le point d'intersection entre le segment [AE] et le quart de cercle de centre A et de rayon 1.

(c) En considérant le triangle AH_0O_0 rectangle en H_0, montrer que r_0 vérifie $r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$.

(d) Résoudre l'équation précédente et montrer que $r_0 = 2 - \sqrt{3}$.

(e) En déduire la valeur exacte de l'aire A_{min} du disque délimité par le cercle C_0 puis une valeur approchée par défaut au centième.

Q3 : À l'aide de ce qui précède, donner un encadrement de la somme des aires des disques, les valeurs seront données au centième.

Partie 2 : Des rayons bien rangés et bien alignés !

Dans cette partie, on s'intéressera à la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des rayons des cercles C_n, $n \in \mathbb{N}$ formant l'hypoténuse du triangle AH_0O_0 rectangle en H_0.

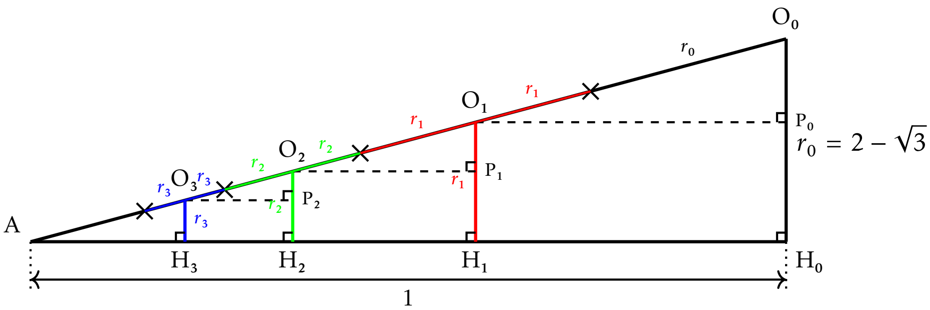


Figure 4 - Suite de triangles

Q1 : En s'aidant du résultat de la question **Q2.b** de la partie 1, montrer que $AO_0 = \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}$.

Q2 : En remarquant que $AO_1 = AO_0 - O_1O_0$ montrer que $\dfrac{r_1}{r_0} = \dfrac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

En déduire une valeur arrondie à 10^{-4} près du rapport $\dfrac{r_1}{r_0}$.

Q3 : Justifier que les triangles $O_iO_{i+1}P_i$ sont semblables, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, c'est-à-dire que leurs angles sont égaux deux à deux.

Q4 : Exprimer les longueurs des segments $[O_iP_i]$ en fonction de r_i et r_{i+1}. Les triangles $O_iO_{i+1}P_i$ étant semblables, on a l'égalité des rapports suivants :

$$\frac{O_iO_{i+1}}{O_iP_i} = \frac{O_{i+1}O_{i+2}}{O_{i+1}P_{i+1}}, \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbb{N}$$

Q5 : En déduire les relations suivantes :

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \cdots = \frac{r_i}{r_{i+1}} = \cdots = \frac{r_{n-1}}{r_n} = \frac{r_n}{r_{n+1}}, \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbb{N}$$

Q6 : À l'aide des égalités précédentes, montrer qu'il existe un réel q tel que :

$$r_{n+1} = q \times r_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, r_n est le rayon du cercle C_n .
On a ainsi établi que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

Q7 : En utilisant les questions **Q6** et **Q2** de la partie 2 et une valeur arrondie au dix-millième de r_2 , construire les cercles C_1 et C_2 sur la figure ci-après.
Sur cette figure, une unité est représentée par 10 cm.

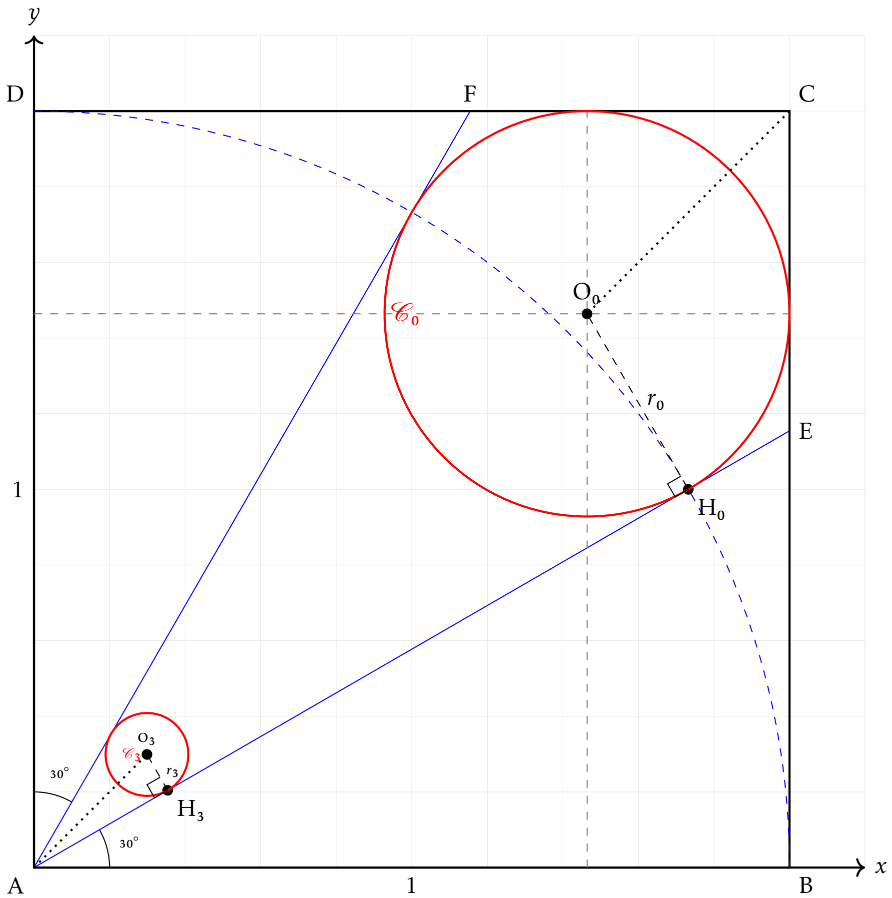


Figure 5 – figure à compléter

Q8 : On pose $u_n = \pi(r_n)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison q^2.

Q9 : Expliquer pourquoi la somme A des aires de tous les disques C_k, pour k entier naturel, vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1 - (r_1 r_0)^2}$$

En déduire une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.

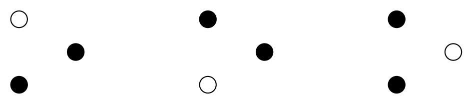
On rappelle pour cette question que pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$, la somme S_n des $(n+1)$ premiers termes vaut :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

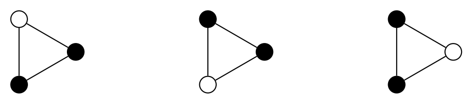
Exercice 2. Une aventure clés en main

Lara, une brillante aventurière, explore les ruines d'une civilisation oubliée. Elle trouve d'abord deux clés identiques dans un coffre bien caché. Dans une salle mystérieuse à l'autre bout des ruines, elle découvre un levier à côté d'une majestueuse porte fermée, et des serrures adaptées aux clés qu'elle a trouvées.
Elle réussit à déchiffrer l'inscription suivante :
« Pour ouvrir la porte des élus, placer les deux clés chacune dans une serrure puis abaissez le levier. Seules certaines serrures permettent d'ouvrir la porte, les autres empêchent son ouverture. »
Lara remarque que même en insérant les clés elle ne peut pas distinguer les serrures *fonctionnelles*, qui permettent d'ouvrir la porte, des serrures *bloquantes*, qui en empêchent l'ouverture.

On dit que Lara fait un *essai* quand elle a placé ses deux clés chacune dans une serrure, et qu'elle abaisse le levier. On dit que l'essai *teste* les serrures. Si les deux serrures testées sont fonctionnelles, la porte s'ouvre, l'essai est *réussi*. Si le levier retourne dans sa position de départ sans que la porte ne s'ouvre, l'essai *échoue*, cela signifie qu'au moins une des deux serrures testées est bloquante. Dans ce cas, l'aventurière doit réessayer.
Un ensemble d'essais est *certain* si pour chaque configuration des serrures fonctionnelles et bloquantes au moins un des essais sera réussi. Le *nombre optimal d'essais* est le nombre k tel qu'il existe un ensemble certain de k essais mais il n'existe pas d'ensemble certain avec un nombre d'essais strictement inférieur.
Pour représenter une configuration on peut symboliser les serrures fonctionnelles par ● et les serrures bloquantes par ○. Dans le cas où il y a trois serrures : deux serrures fonctionnelles et une serrure bloquante, alors il y a trois configurations possibles, représentées ci-dessous :



Un essai peut être représenté par un trait reliant les serrures testées. L'ensemble de trois essais représenté ci-dessous est certain puisque pour chaque configuration au moins un essai teste les deux serrures fonctionnelles :



Partie 1 : Première porte

Dans cette salle, il y a quatre serrures : trois sont fonctionnelles et une est bloquante. Lara numérote au hasard les serrures de 1 à 4 pour pouvoir garder une trace de ses essais. L'essai testant les serrures 1 et 3 sera noté $1 - 3$ ou $3 - 1$, l'ordre n'a pas d'importance.

Q1 : **(a)** Proposer un ensemble certain d'essais.
(b) Justifier qu'un seul essai ne suffit pas à ouvrir la porte pour toutes les configurations.
(c) En déduire que le nombre optimal d'essais est 2.

Q2 : Déterminer la probabilité que Lara réussisse à ouvrir la porte à son premier essai si elle place les clés dans des serrures choisies totalement au hasard.

Partie 2 : Deuxième porte

Lara réussit à ouvrir la porte des élus. Derrière, elle trouve une autre pièce avec la même énigme mais avec plus de serrures. Cette fois, il y a trois serrures fonctionnelles et deux bloquantes. Les serrures sont numérotées de 1 à 5, sans savoir lesquelles sont fonctionnelles ou bloquantes.

Q1 : Dans cette question Lara tente l'ensemble d'essais $\{1 - 2\,;\, 3 - 4\,;\, 1 - 5\}$ mais ils échouent tous. Proposer des numéros où peuvent se trouver les serrures fonctionnelles.

Q2 : En justifiant soigneusement, décrire un ensemble certain de quatre essais.

Q3 : Soit E un ensemble quelconque de trois essais exactement.

  (a) Justifier qu'au moins une serrure a été choisie pour au moins deux essais.

  (b) Démontrer qu'il existe une configuration des serrures pour laquelle les trois essais échouent.

Q4 : Justifier que le nombre optimal d'essais est 4.

Partie 3 : Toujours plus de portes

À partir de la salle suivante, et à chaque fois que Lara réussit à ouvrir une porte, elle trouve une énigme similaire avec f serrures fonctionnelles et b serrures bloquantes, où f et b sont des nombres entiers avec $f \geqslant 2$ et $b \geqslant 0$.
Une configuration des serrures dans ce cas est appelée $(f\,;b)$-configuration, tandis qu'un ensemble certain pour cette énigme est dit $(f\,;b)$-certain.
Le nombre d'essais d'un ensemble E est noté $|E|$.
On note $O(f\,;b)$ le nombre optimal d'essais correspondant à cette situation, c'est-à-dire le plus petit nombre $|E|$ pour E $(f\,;b)$-certain.

Dans cette question, $f = b = 3$. Il y a donc 6 serrures dont la moitié sont fonctionnelles.

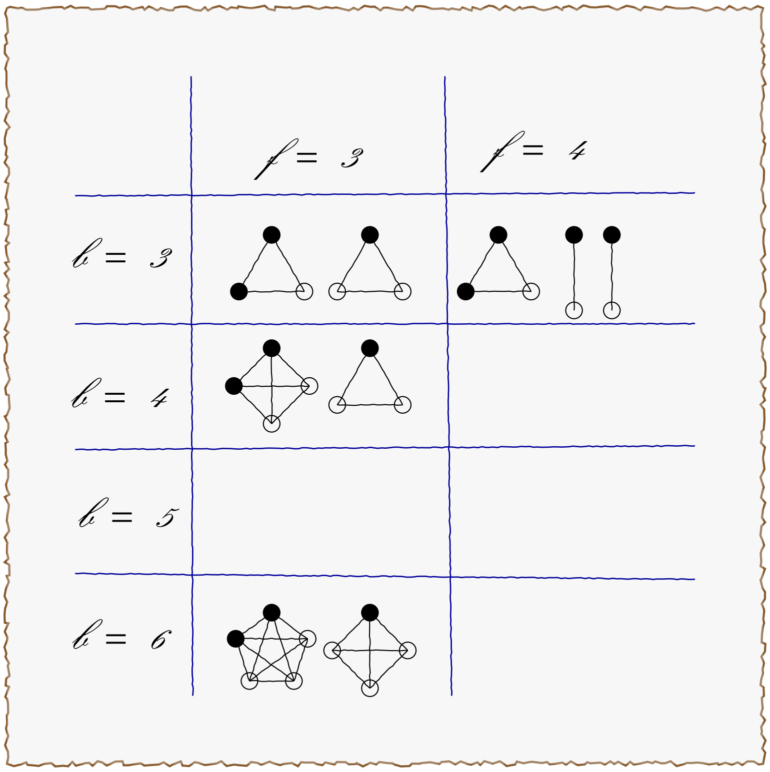
Q1 : Déterminer un ensemble $(3;3)$-certain de 6 essais.

Q2 : Démontrer que $O(3;3) = 6$. On pourra prendre un ensemble quelconque de 5 essais et se ramener à la situation de la question **Q4** de la partie 2.

Q1 : Démontrer que pour tout $f \geqslant 2$, $O(f\,;b) \geqslant b + 1$.

Q2 : Démontrer que si $f \geqslant b + 2$ alors $O(f\,;b) = b + 1$.

Dans une des salles, Lara trouve un papier avec des inscriptions en partie effacées qui semblent résumer les découvertes d'une personne l'ayant précédée. Ce document est présenté ci-après.
Compléter les informations manquantes directement sur le document en suivant la logique utilisée.



Le document trouvé par terre par Lara

Si S est un ensemble de serrures (fonctionnelles ou bloquantes), la *clique* associée à S est l'ensemble de tous les essais testant n'importe quelle paire de serrures de S.
Par exemple, la clique associée à un ensemble de deux serrures est l'essai testant ces deux serrures. La clique associée aux serrures 1, 2, et 3 est $\{1{-}2\,;1{-}3\,;2{-}3\}$.
Des cliques sont *disjointes* si et seulement si aucune serrure n'est testée par deux cliques.

Démontrer que le seul ensemble $(2;b)$-certain est la clique associée aux $b + 2$ serrures.

En déduire que $O(2;b) = \dfrac{(b+1)(b+2)}{2}$

Le but de cette question est de construire pour tout $f \geqslant 2$ et $b \geqslant f-2$ un ensemble $(f;b)$-certain d'essais constitué de l'union de $f-1$ cliques disjointes. On notera $\mathrm{E}(f;b)$ cet ensemble d'essais.

Q1 : Si $b = f-2$, proposer sans justifier un ensemble de $b+1 = f-1$ essais qui convient pour $\mathrm{E}(f;b)$.

Dans la suite de cette question, on prend $f \geqslant 2$ et $b \geqslant f-2$, et on suppose déjà construit l'ensemble $(f;b)$-certain $\mathrm{E} = \mathrm{E}(f;b)$. On numérote de 1 à $f+b$ les serrures, et on ajoute une serrure qu'on numérotera $f+b+1$.

Q2 : Justifier que si une $(f;b+1)$-configuration fait échouer tous les essais de E alors la serrure $f+b+1$ est fonctionnelle.

Q3 : Justifier que si une $(f;b+1)$-configuration fait échouer tous les essais de E alors il y a exactement une serrure fonctionnelle testée par chaque clique de E.

Q4 : Construire un ensemble $\mathrm{E}' = \mathrm{E}(f;b+1)$ tel que :

- E' est $(f;b+1)$-certain ;
- $|\mathrm{E}'| = |\mathrm{E}| + k$ où k est le nombre de serrures associées à la plus petite clique de E.
- E' est l'union de $f-1$ cliques disjointes.

Démontrer soigneusement ces trois propriétés.

Étude de $|\mathrm{E}(f;b)|$:

Q1 : Expliquer pourquoi si $f-1 \leqslant b < 2(f-1)$ alors $|\mathrm{E}(f;b)| = |\mathrm{E}(f;b-1)| + 2$.

Q2 : Expliquer pourquoi si $2(f-1) \leqslant b < 3(f-1)$ alors $|\mathrm{E}(f;b)| = |\mathrm{E}(f;b-1)| + 3$.

Q3 : Démontrer que si $q(f-1) \leqslant b < (q+1)(f-1)$ alors $|\mathrm{E}(f;b)| = |\mathrm{E}(f;b-1)| + q + 1$.

Q4 : En déduire que si $b = q(f-1) - 1$ avec $q \geqslant 1$ alors :

$$|\mathrm{E}(f;b)| = (f-1)(1+2+3+\cdots+q)$$

Pour aller plus loin après cette épreuve : il est possible de démontrer la propriété suivante (ce n'est pas demandé aux candidats et ne peut pas être admis pour répondre aux questions précédentes) :

$$\mathrm{O}(f;b) = |\mathrm{E}(f;b)| = \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (q+1)(r+1)$$

Corrigé de l'exercice 1 : Un problème d'aire qui ne manque pas d'air !

Partie 1 : Ne dépassons pas les bornes !

Q1 : **(a)** Dans le triangle ABE rectangle en B : $\sin(30°) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\text{BE}}{\text{AE}}$ et $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AE}}$, ainsi :

$$\tan(30°) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}}_{=\frac{\sqrt{3}}{3}} = \underbrace{\frac{\text{BE}}{\text{AE}} \times \frac{\text{AE}}{\text{AB}}}_{\frac{\text{BE}}{1}}$$

D'où le résultat : $\text{BE} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) Les triangles ABE et ADF sont égaux et ont donc la même aire :

$$\text{A}_{\text{ADF}} = \text{A}_{\text{ABE}} = \frac{\text{AB} \times \text{BE}}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(c) L'aire recherchée correspond à la différence entre l'aire du carré ABCD et la somme des aires des deux triangles ABE et ADF, ainsi :

$$\text{A}_{m}ax = \text{A}_{\text{ABCD}} - (\text{A}_{\text{ADF}} + \text{A}_{\text{ABE}})$$

$$\text{A}_{m}ax = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{A}_{m}ax = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,4226\cdots \approx 0,43$$

Q2 : **(a)** Dans le triangle ABC rectangle en C, on utilise le théorème de Pythagore :

$$\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2$$

$$\text{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\text{AC}^2 = 2$$

$$\text{AC} = \sqrt{2} \approx 1,42$$

Comme $0 \leqslant r_0 \leqslant \text{AC}$, on a $0 \leqslant r_0 \leqslant \sqrt{2}$

(b) Dans le triangle O_0CH rectangle en H, en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\text{O}_0\text{C} = r_0\sqrt{2}$$

D'où :

$$\text{AO}_0 = \text{AC} - \text{O}_0\text{C}$$

$$\text{AO}_0 = \sqrt{2} - r_0\sqrt{2}$$

$$\text{AO}_0 = \sqrt{2}\,(1 - r_0)$$

(c) Dans le triangle AH_0O_0 rectangle en H_0, on utilise le théorème de Pythagore :

$$\text{AH}_0^2 + \text{O}_0\text{H}_0^2 = \text{AO}_0^2$$

$$1^2 + r_0^2 = 2(1 - r_0)^2$$

$$1 + r_0^2 = 2 - 4r_0 + 2r_0^2$$

Ainsi r_0 vérifie :

$$r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$$

(**d**) L'équation précédente est de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$; $b=-4$; $c=1$.
On calcule le discriminant de cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 1 = 16-4 = 12 > 0$$

On obtient deux racines distinctes réelles :
$r_0' = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \approx 3,73$ et $r_0'' = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \approx 0,26$
Or on sait d'après la question Q2 a) que $0 \leqslant r_0 \leqslant \sqrt{2}$
donc r_0' ne convient pas et r_0'' est la seule solution acceptable.
Ainsi $r_0 = r_0'' = 2-\sqrt{3}$.

(**e**) $\mathrm{A}_m in = \pi\cdot r_0^2 = \pi\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = \pi\cdot(7-4\sqrt{3}) = 0,225\cdots \approx 0,22$

Q3 : $\mathrm{A}_{min} \leqslant \mathrm{A} \leqslant \mathrm{A}_{max}$
On obtient ainsi l'encadrement de la somme de toutes les aires A :

$$0,22 < \mathrm{A} < 0,43$$

REMARQUE :
0,22 est obtenu avec la question Q2 e) en prenant une valeur approchée par défaut.
0,43 est obtenu avec la question Q1 c) en prenant une valeur approchée par excès.
Les valeurs 0,23 et 0,42 ne sont pas acceptables car l'une trop majorée et l'autre trop minorée.

Partie 2 : Des rayons bien rangés et bien alignés !

Q1 : D'après Q2 b) de la partie précédente, on a $\mathrm{AO}_0 = \sqrt{2}(1-r_0)$ et $r_0 = 2-\sqrt{3}$, ainsi :

$$\mathrm{AO}_0 = \sqrt{2}\left(1-2+\sqrt{3}\right)$$

D'où le résultat :

$$\mathrm{AO}_0 = (\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$$

Q2 : Sur le segment $[\mathrm{AO}_0]$, on a :

$$\mathrm{AO}_1 = \mathrm{AO}_0 - \mathrm{O}_1\mathrm{O}_0$$

$$\mathrm{AO}_1 = \mathrm{AO}_0 - (r_0+r_1)$$

$$\mathrm{AO}_1 = (\sqrt{3}-1)\sqrt{2} - (2-\sqrt{3}+r_1)$$

$$\mathrm{AO}_1 = -2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-r_1$$

Sachant que :

$$\frac{\mathrm{H}_1\mathrm{O}_1}{\mathrm{H}_0\mathrm{O}_0} = \frac{\mathrm{AO}_1}{\mathrm{AO}_0}$$

On obtient :

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-r_1)}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}$$

On utilise l'égalité des produits en croix :

$$r_1(\sqrt{3}-1)\sqrt{2} = r_0(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-r_1)$$

On distribue r_0 :

$$r_1(\sqrt{3}-1)\sqrt{2} = r_0(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}) - r_0\cdot r_1$$

On factorise par r_1 :

$$r_1((\sqrt{3}-1)\sqrt{2}+r_0) = r_0(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$$

On substitue la valeur de r_0 dans l'égalité :

$$r_1((\sqrt{3}-1)\sqrt{2}+2-\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$$

$$r_1(2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}) = (2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$$

D'où

$$r_1 = \frac{(2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})} = 54+38\sqrt{2}-31\sqrt{3}-22\sqrt{6}$$

Du résultat précédent on peut déduire que :

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}} = 15+10\sqrt{2}-8\sqrt{3}-6\sqrt{6}$$

$$\frac{r_1}{r_0} \approx 0,5888$$

Q3 : Les angles des triangles $O_iO_{i+1}P_i$ sont deux à deux égaux, donc les triangles sont semblables.

Q4 : $O_iP_i = r_i - r_{i+1}$

Q5 : Pour les triangles semblables $O_iO_{i+1}P_i$ et $O_{i+1}O_{i+2}P_{i+1}$ l'égalité des rapports de longueurs peut s'écrire :

$$\frac{r_i + r_{i+1}}{r_i - r_{i+1}} = \frac{r_{i+1} + r_{i+2}}{r_{i+1} - r_{i+2}}$$

Ou encore :

$$(r_i + r_{i+1}) \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) = (r_{i+1} + r_{i+2}) \cdot (r_i - r_{i+1})$$

En distribuant on obtient :

$$r_ir_{i+1} - r_ir_{i+2} + r_{i+1}^2 - r_{i+1}r_{i+2} = r_ir_{i+1} - r_{i+1}^2 + r_ir_{i+2} - r_{i+1}r_{i+2}$$

En simplifiant, on obtient :

$$r_{i+1}^2 = r_ir_{i+2}$$

D'où

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+2}}$$

Par récurrence sur $\mathbb{N}$, on obtiendrait les relations proposées.

Q6 : De la question précédente, on a : $\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_i}{r_{i+1}}$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, avec $n \in \mathbb{N}$ (idée de récurrence descendante).

Cela peut s'écrire : $r_{i+1} = \frac{r_1}{r_0} \times r_i$

En posant : $q = \frac{r_1}{r_0}$, on obtient que q est bien un nombre réel, et on peut écrire : $r_{n+1} = q \times r_n$, pour $n \in \mathbb{N}$

Q7 : D'après la question Q2 ou Q6 on a $r_1 = q \times r_0 \approx 0,1578$, ainsi C_1 est représenté à l'échelle 10 par un cercle de rayon $1,6$ cm.

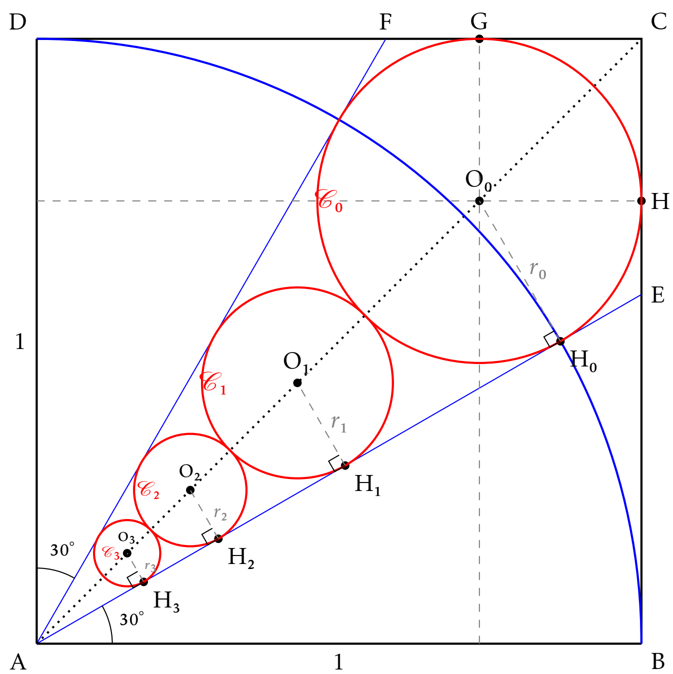
Cette information permet de tracer le cercle C_1.

D'après la question Q6, on a : $r_2 = q \times r_1$, puis en remplaçant n par 2 et q par $0,5888$, on obtient :

$$r_2 \approx 0,5888 \times 0,1578 \approx 0,09291$$

Ainsi C_2 est représenté à l'échelle 10 par un cercle de rayon $0,9$ cm.

Cette information permet de tracer le cercle C_2.



Q8 : D'après la question Q6, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des rayons des cercles $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, son terme général s'exprime ainsi :

$$r_n = r_0 \times \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n$$

Élevons le terme général au carré :

$$(r_n)^2 = (r_0)^2 \times \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}$$

Cette suite de rayon au carré est aussi géométrique, de raison constante égale à $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2$.

Q9 : On peut en déduire la somme de ses termes :

$$\pi \times (r_0)^2 \times \frac{1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n+2}}{1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

Pour des grandes valeurs de n on peut négliger le terme : $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{(}2n+2)$, car : $q = \frac{r_1}{r_0} \approx 0,5887 < 1$.

Ainsi, cette somme de termes peut s'écrire :

$$\frac{(r_0)^2}{1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

On peut en déduire que la somme des aires A de tous les disques vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

On en déduit une valeur arrondie de A à 10^{-2} près :

$$A \approx \pi \times \frac{0,2679^2}{1-(0,5887)^2} \approx 0,35$$

Ce résultat est cohérent car d'après la 1ère partie, on a : 0,22<A<0,43

Corrigé de l'exercice 2 : Une aventure clés en main

Partie 1 : Première porte

Q1 : **(a)** $\{1-2;3-4\}$ est certain.

(b) Il suffit que la serrure bloquante soit l'une des deux serrures choisies lors de l'unique essai pour que cet essai soit raté.

(c) Il existe un ensemble certain à deux essais, mais aucun à un seul essai : le nombre optimal d'essais est bien 2.

Q2 : Pour que la porte s'ouvre dès le premier essai il faut et il suffit que les deux serrures choisies soient fonctionnelles. Il y a ainsi 3 possibilités pour la première serrure et 2 pour la deuxième, soit 6 choix possibles pour faire un essai réussi. Puisque l'ordre dans lequel les serrures sont choisies n'a aucune importance, il y a exactement 3 essais réussis.

Le nombre d'essais possibles est $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

Par équiprobabilité, la probabilité qu'un unique essai soit réussi est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : Deuxième porte

Q1 : Si les serrures 2, 4 et 5 sont fonctionnelles (et les serrures 1 et 3 bloquantes) alors les trois essais sont ratés.

Q2 : L'ensemble d'essais $\{1-2;1-3;2-3;4-5\}$ est certain. En effet, si au moins deux des serrures 1, 2 et 3 sont fonctionnelles alors au moins un des trois premiers essais est réussi puisqu'on essaie toutes les combinaisons. Sinon, au plus une de ces serrures est fonctionnelle et les deux serrures fonctionnelles qui restent sont forcément 4 et 5 ce qui rend le dernier test réussi.

Q3 : **(a)** Si les deux premiers essais n'ont aucune serrure en commun, alors quatre des cinq serrures ont été testées. Le troisième essai doit alors tester au moins une de ces quatre serrures qui sera alors testée par deux essais.

(**b**) Prenons une serrure testée par au moins deux essais, et décidons que cette serrure est bloquante. Les deux essais échouent donc. Il reste un seul essai et quatre serrures, trois fonctionnelles et une bloquante. Positionnons la deuxième et dernière serrure bloquante sur une des deux serrures testées par ce dernier essai. Les trois serrures fonctionnelles sont placées aux emplacements non encore choisis. Par construction, les trois essais échouent, et l'on a bien construit la configuration demandée : l'ensemble E n'est pas certain.

Q4 : Tout d'abord, aucun ensemble de un ou deux essais ne peut être certain car il serait alors possible de rajouter des essais quelconques pour créer un ensemble de trois essais, certain lui aussi. Aucun ensemble de strictement moins de quatre essais n'est certain, et on a construit un ensemble certain à quatre essais : c'est donc le nombre optimal.

Partie 3 : Toujours plus de portes

Q1 : (**a**) $\{1-2; 1-3; 2-3; 4-5; 4-6; 5-6\}$. Si les trois premiers essais échouent, alors il y a au moins deux serrures bloquantes parmi 1, 2, et 3. Il ne reste donc qu'au plus une serrure bloquante dans 4, 5, et 6, ce qui fait qu'au moins un des trois derniers essais réussit.

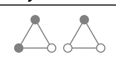
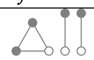
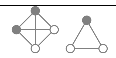
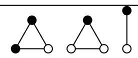
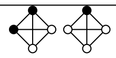
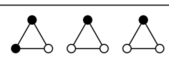
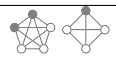
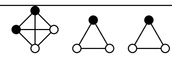
(**b**) Soit E un ensemble de 5 essais. Les 5 essais ne peuvent pas être deux à deux disjoints car il y a $f+b = 6 < 10$ serrures. Une des serrures est donc testée par au moins deux essais. En y plaçant une serrure bloquante, tous ces essais sont ratés et les essais qui restent forment un ensemble E$'$ d'essais pour les cinq autres serrures. Or il reste au maximum 3 essais pour 3 serrures fonctionnelles et 2 bloquantes. L'ensemble E$'$ n'est donc pas certain et E non plus puisqu'on rajoute deux essais ratés à la configuration qui fait rater tous les essais de E$'$.

En définitive, $\mathrm{O}(3;3) > 5$. La question précédente permet d'assurer que $\mathrm{O}(3;3) \leq 6$ et ainsi $\mathrm{O}(3;3) = 6$.

Q2 : (**a**) Soit E un ensemble $(f;b)$-certain. Tant qu'il reste au moins une serrure bloquante à placer, il existe un essai de E dont aucune des serrures n'a été affectée car E est certain. On positionne alors une serrure bloquante sur cet essai qui est ainsi raté. Placer ensuite les serrures fonctionnelle dans les emplacements non affectés complète la configuration pour laquelle b essais sont ratés. Puisque E est certain, il y a donc au moins un essai réussi, soit au moins $b+1$ essais au total.

(**b**) Supposons $f \geq b+2$. Puisqu'il y a $f+b \geq 2(b+1)$ serrures, on peut fixer un ensemble E de $b+1$ essais deux à deux disjoints. Au plus b de ces essais contient une serrure bloquante, donc au moins un essai est réussi. On a un ensemble $(f;b)$-certain de $b+1$ essais donc $\mathrm{O}(f;b) \leq b+1$, et grâce à la question précédente $\mathrm{O}(f;b) = b+1$.

Q3 : Voici le document rempli :

	$f=3$	$f=4$
$b=3$		
$b=4$		
$b=5$		
$b=6$		

Q4 : Soit E un ensemble $(2;b)$-certain. Pour toute paire (a,b) de serrures, la configuration où seules a et b sont fonctionnelles ne permet qu'un seul essai réussi : $a-b$. Puisque E est certain, c'est que $a-b \in \mathrm{E}$, et ce pour tous (a,b). En définitive, E est la clique de tous les essais possibles, qui sont au nombre de $\dfrac{(b+1)(b+2)}{2}$.

Q5 : (**a**) Il y a $f+b = 2b+2$ serrures. On peut donc choisir $b+1$ essais sans aucune serrure en commun. Ce sont bien $b+1$ cliques disjointes, et cet ensemble est $(f;b)$-certain car c'est l'ensemble construit en question 7.b.

(**b**) Si la serrure $f+b+1$ est bloquantes alors la configuration des $f+b$ premières serrures est une $(f;b)$-configuration et au moins un essai de E est réussi.

(**c**) S'il y a plus d'une serrure fonctionnelle dans une clique de E alors cette clique abrite un essai réussi. Il y a donc au plus une serrure fonctionnelle par clique. Or E contient $f-1$ cliques et il y a $f-1$ serrures fonctionnelles (l'une est en position $f+b+1$ donc hors des serrures essayées par E). Il y a donc exactement une serrure fonctionnelle par clique.

(**d**) Prenons la plus petite clique C de E, et pour chaque serrure s associée à C ajoutons à E l'essai s-$f+b+1$. On ajoute bien k essais qui agrandissent C en une clique associée à $\mathrm{C} \cup \{f+b+1\}$. Le nombre de cliques reste ainsi inchangé.

Enfin, toute $(f;b+1)$-configuration a soit un essai réussi dans E, soit un essai réussi entre $f+b+1$ et la serrure fonctionnelle de C.

Q6 : Dans la suite, on appellera k-clique toute clique associée à k serrures.

(a) Tant qu'il reste des 2-cliques dans $\mathrm{E}(f;b-1)$, $|\mathrm{E}(f;b)| = |\mathrm{E}(f;b-1)| + 2$ car on remplace une 2-clique par une 3-clique en ajoutant 2 essais.

Or $\mathrm{E}(f;f-2)$ comporte $f-1$ essais sans serrure en commun et est ainsi l'union disjointe de $f-1$ cliques à deux serrures.

On peut donc faire le remplacement indiqué $f-1$ fois, soit de $b = f-1$ jusqu'à $b = f-1+f-2 = 2(f-1)-1$. On a bien le résultat demandé.

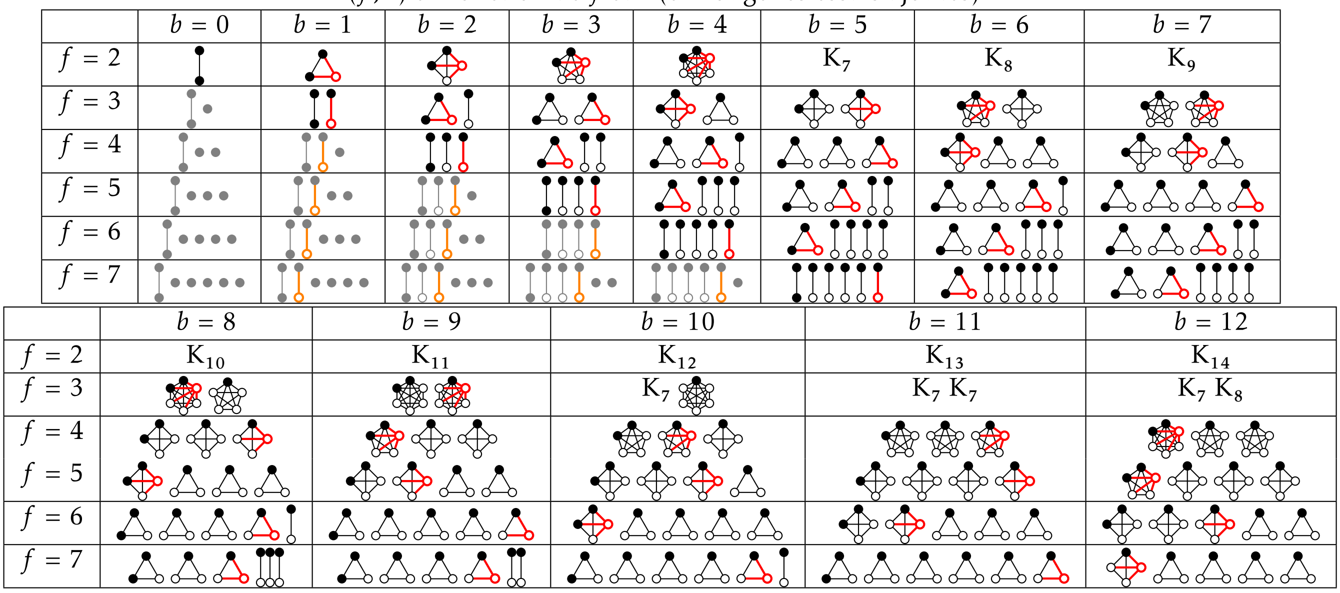
(b) Si $2(f-1) \leqslant b < 3(f-1)$ alors les cliques de $\mathrm{E}(f;b)$ sont des 3-cliques ou des 4-cliques, et il reste au moins une 3-clique, donc $|\mathrm{E}(f;b)| = |\mathrm{E}(f;b-1)| + 3$.

(c) $\mathrm{E}(f;q(f-1)-1)$ est constitué de $f-1$ $(q+1)$-cliques, donc les $f-1$ constructions suivantes transforment une $(q+1)$-clique en $(q+2)$-clique jusqu'à $\mathrm{E}(f;(q+1)(f-1)-1)$ qui ne contient que des $(q+2)$-cliques, toujours au nombre de $f-1$.

(d)
$$\begin{aligned}
|\mathrm{E}(f;b)| &= |\mathrm{E}(f;f-2)| + \sum_{i=f-1}^{b} \left(|\mathrm{E}(f;i)| - |\mathrm{E}(f;i-1)|\right)\\
&= |\mathrm{E}(f;f-2)| + \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=k(f-1)}^{(k+1)(f-1)-1} \left(|\mathrm{E}(f;i)| - |\mathrm{E}(f;i-1)|\right)\\
&= |\mathrm{E}(f;f-2)| + \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{i=k(f-1)}^{(k+1)(f-1)-1} (k+1)\\
&= f-1 + \sum_{k=1}^{q-1} (f-1)\times(k+1)\\
&= (f-1)\sum_{k=1}^{q} k
\end{aligned}$$

Complément : deux tableaux révélateurs

$\mathrm{E}(f;b)$ en fonction de f et b (en rouge les essais ajoutés) :



$\mathrm{O}(f;b)$ en fonction de f et b :

	$b=0$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$	$b=12$	$b=13$	$b=14$	$b=15$
$f=2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136
$f=3$	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72
$f=4$	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35	40	45	51
$f=5$	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40
$f=6$	1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27	30	34
$f=7$	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	21	24	27	30
$f=8$	1	2	3	4	5	6	7	9	11	13	15	17	19	21	24	27
$f=9$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$f=10$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	15	17	19	21	23
$f=11$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	22
$f=12$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	17	19	21
$f=13$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	20
$f=14$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17	19
$f=15$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18