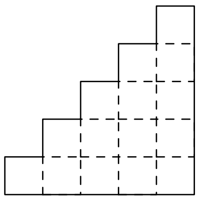
Nantes 2024

Exercice 1. Escagone

Soit n un entier naturel non nul.

Un *escagone* de hauteur n est une figure formée de n colonnes. Chacune de ces colonnes est constituée de carrés unités avec 1 carré unité sur la première colonne, 2 carrés unités sur la deuxième,... la dernière colonne est constituée de n carrés unités.

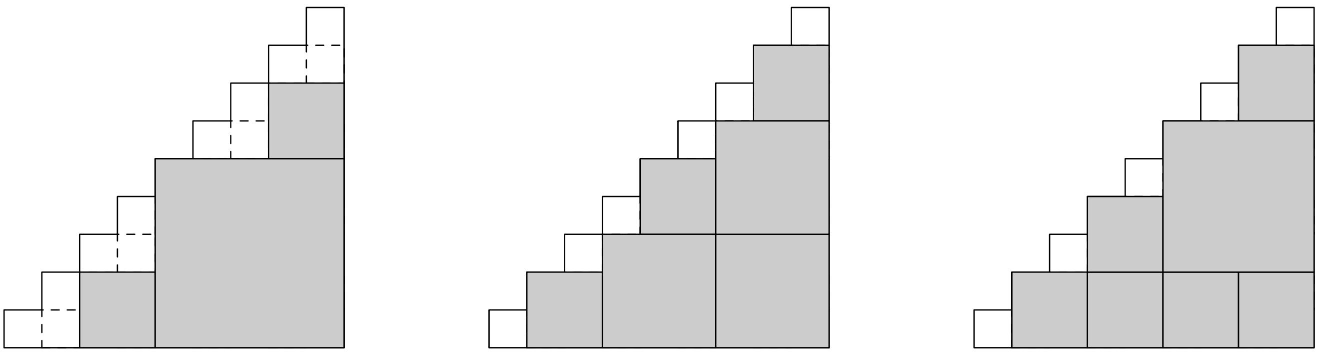
La figure ci-dessous montre un escagone de hauteur $n = 5$.



On s'intéresse, dans cet exercice, au recouvrement d'un escagone de hauteur n par des tuiles carrées dont le côté est multiple de l'unité :

- qui ne se chevauchent pas ;
- dont les tailles peuvent être différentes.

Les trois figures ci-dessous montrent trois recouvrements différents d'un même escagone de hauteur $n = 9$:



- à gauche : douze tuiles de côté 1, deux tuiles de côté 2 et une tuile de côté 5, soit quinze tuiles au total ;
- au milieu : six tuiles de côté 1, trois tuiles de côté 2 et trois tuiles de côté 3, soit douze tuiles au total ;
- à droite : cinq tuiles de côté 1, six tuiles de côté 2 et une tuile de côté 4, soit douze tuiles au total.

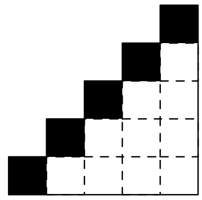
On cherche plus particulièrement à déterminer le nombre minimal de tuiles carrées nécessaires pour recouvrir un escagone de hauteur n ; on note ce nombre minimal $T(n)$.

Par exemple on peut vérifier que, $T(1) = 1$; $T(2) = 3$; $T(3) = 3$.

Q1 : Montrer que $T(4) = 7$ et dessiner un recouvrement minimal d'un escagone de hauteur 4 par sept tuiles.

Q2 : Déterminer $T(5)$.

On appelle carré de la diagonale un carré unité situé en haut d'une colonne (en noir dans l'escagone ci-contre de hauteur 5).



Q3 : Justifier que le nombre total de tuiles nécessaires à un recouvrement de l'escagone est supérieur ou égal au nombre de carrés de la diagonale. En déduire que $\mathrm{T}(n) \geqslant n$ pour tout n entier.

Questions de parité

Q4 : Dans cette question, on suppose $\mathrm{T}(n) = n$. Justifier alors que la tuile qui recouvre le carré unité en bas à droite recouvre aussi un carré de la diagonale. En déduire que n est un entier naturel impair.

Q5 : La condition n impair est-elle suffisante pour avoir $\mathrm{T}(n) = n$?

Q6 : Justifier que $\mathrm{T}(6) \geqslant 7$. Que vaut $\mathrm{T}(6)$?

Le cas $\mathrm{T}(n) = n$

Q7 : On considère un escagone de hauteur n tel que $\mathrm{T}(n) = n$. Montrer que le carré unité en bas de la deuxième colonne est recouvert par une tuile de côté 2.

Q8 : En déduire que si $\mathrm{T}(n) = n$ alors l'entier n est de la forme :

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k, \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$

Q9 : Montrer que la réciproque est vraie.

Q10 : En conclure que $\mathrm{T}(n) = n$ si et seulement si $n = 2^{k+1} - 1$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

Q11 : Justifier que $\mathrm{T}(7) = 7$ et proposer un recouvrement réalisant $\mathrm{T}(7)$.

Escagone de hauteur $n = 8$

Pour les questions suivantes, on considèrera uniquement le cas d'un escagone de hauteur 8.

Q12 : Donner un recouvrement utilisant une tuile de côté 4 de l'escagone utilisant le moins de tuiles possibles. En déduire un premier encadrement de $\mathrm{T}(8)$.

Q13 : Donner un recouvrement minimal de l'escagone utilisant trois tuiles de côté 3. En déduire que $9 \leqslant \mathrm{T}(8) \leqslant 12$.

Q14 : On considère un recouvrement par des tuiles de taille 3 maximum. On note n_1 , n_2 et n_3, le nombre respectif de tuiles de côté 1, 2 et 3 qui recouvrent l'escagone. Exprimer son aire en fonction de n_1, n_2 et n_3.

Q15 : Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{T}(8)$ et dessiner un pavage réalisant $\mathrm{T}(8)$ (observer que ce pavage n'est pas symétrique).

Exercice 2. Disque pincé

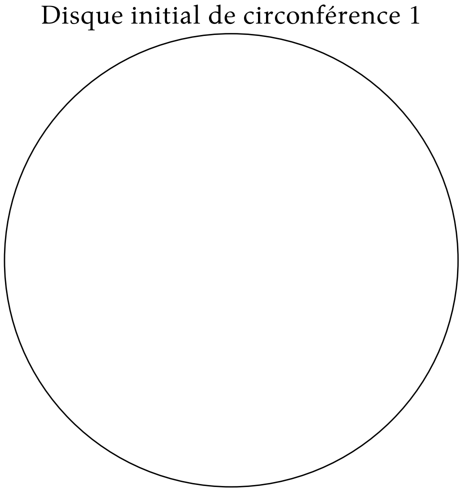
Les différentes parties de l'exercice sont indépendantes.

Une unité de longueur a été choisie.

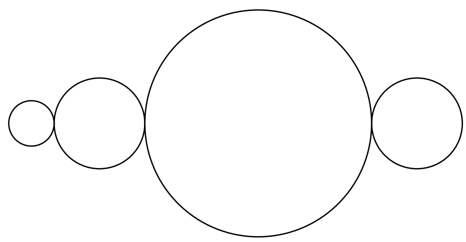
On appelle *disque initial* un disque délimité par une ficelle *non extensible* de longueur 1.

On pince ce disque une ou plusieurs fois (pincer consiste à joindre deux points distincts de la ficelle pour former deux nouveaux disques). La figure alors obtenue, appelée *disque pincé*, est constituée de plusieurs disques dont la somme des circonférences vaut 1 (circonférence du disque initial).

Disque initial de circonférence 1



Disque pincé (trois fois)



Sur cet exemple, les quatre disques ont pour circonférences $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{10}$ et $\frac{2}{10}$. La somme de ces circonférences vaut 1.

APMEP

On note Q le quotient de l'aire du disque pincé par l'aire du disque initial. Par exemple, si l'aire du disque pincé vaut les deux tiers de celle du disque initial alors $Q = \frac{2}{3}$.

L'objectif principal de l'exercice est de chercher, sous certaines contraintes, comment pincer le disque initial pour rendre Q le plus petit possible.

À cet effet, on rappelle que la circonférence d'un disque de rayon r est $2\pi r$ et que son aire est πr^2.

Questions préliminaires

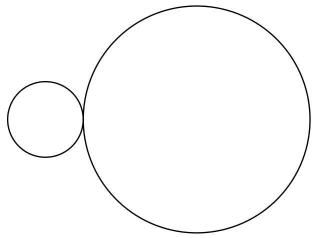
Q1 : Montrer que l'aire du disque initial vaut $\frac{1}{4\pi}$.

Q2 : Calculer Q dans le cas d'un disque pincé constitué de deux disques dont un a pour circonférence $\frac{1}{3}$.

Q3 : Calculer Q dans le cas d'un disque pincé constitué de trois disques parmi lesquels un a pour circonférence $\frac{1}{10}$ et un autre $\frac{1}{2}$.

Disque pincé une fois

On note x et y les circonférences des deux disques constituant le disque pincé avec x et y deux nombres réels strictement positifs. On suppose, sans perte de généralité, que $0 < x \leqslant y$.



Q4 : Quelles sont la valeur minimale et la valeur maximale de x ?

Q5 : Montrer que $Q = x^2 + (1 - x)^2$.

Q6 : Peut-on faire en sorte que l'aire du disque pincé soit égale aux trois quarts de celle du disque initial ? Au tiers ? Peut-elle être supérieure ou égale à celle du disque initial ?

Q7 : Déterminer la (ou les) valeur(s) de x rendant Q le plus petit possible.

Disque pincé deux fois

On note x, y et z les circonférences des trois disques du disque pincé avec x, y et z des nombres réels strictement positifs vérifiant $x + y + z = 1$.

On suppose, sans perte de généralité, que $0 < x \leqslant y \leqslant z$.

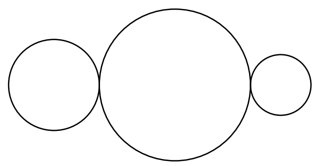
Q8 : Montrer que $z \geqslant \frac{1}{3}$ et $x \leqslant \frac{1}{3}$.

Q9 : Montrer que :

$$Q = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

et vérifier alors que :

$$Q - \frac{1}{3} = 2\left[\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)\right]$$



Q10 : Déterminer les valeurs de x, y et z rendant Q le plus petit possible.

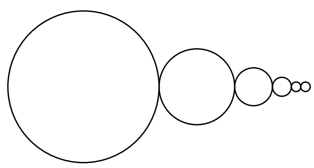
Q11 : Développer l'expression $(x + y + z)^2$.

Q12 : Le disque pincé peut-il avoir une aire supérieure ou égale à celle du disque initial ? Justifier.

Disque pincé n fois dans un cas particulier

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère un disque pincé constitué de $n + 1$ disques, parmi lesquels les n premiers disques ont pour circonférences les nombres $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ où l'entier k varie de 1 à n.

Q13 : Exprimer le plus simplement possible la circonférence du dernier disque constituant le disque pincé.



Q14 : Montrer que $Q > \frac{1}{3}$ dans ce cas particulier.

Q15 : Écrire un algorithme renvoyant la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle :

$$Q - \frac{1}{3} < 10^{-9}.$$

Disque pincé n fois dans le cas général

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère un disque pincé constitué de $n+1$ disques dont on note x_1, x_2,..., x_{n+1} les circonférences respectives.

Q16 : Développer et réduire l'expression

$$\left(x_1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots + \left(x_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2$$

afin de l'exprimer en fonction de Q.

Q17 : En déduire les valeurs des réels x_1, x_2,...,x_{n+1} rendant Q le plus petit possible.

Exercice 3. Transformation Moyenne/Écart-type

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On note D le domaine constitué des points dont l'abscisse x et l'ordonnée y vérifient $x \geqslant y \geqslant 0$ où x et y sont des nombres réels.
Par exemple, les points de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$ ou $(1\,;\,0)$ appartiennent à D, en effet $\frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3} \geqslant 0$ de même que $1 \geqslant 0 \geqslant 0$.
Par contre ce n'est pas le cas des points de coordonnées $(1\,;\,-1)$ ou $(0{,}5\,;\,4)$ car $-1 \leqslant 0$ et $0{,}5 \leqslant 4$.

Q1 : Sur le graphique fourni en annexe, placer deux points W et Z (distincts des précédents) n'appartenant pas à D, puis hachurer le domaine constitué des points n'appartenant pas à D.

Pour chaque point M appartenant à D, on note M′ le point dont l'abscisse est la moyenne m des coordonnées de M et dont l'ordonnée est l'écart-type s des coordonnées de M.

Ce nouveau point M′ est appelé l'image du point M par la transformation Moyenne/Écart-type que l'on notera M/E.

Par exemple, l'image du point A(5 ; 3) est le point A′(4 ; 1) puisque :

$$m = \frac{5+3}{2} = 4 \text{ et } s = \sqrt{\frac{(5-m)^2 + (3-m)^2}{2}} = 1.$$

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés de cette transformation Moyenne/Écart-type.

Q2 : Vérifier que l'image du point B(8 ; 2) est le point A(5 ; 3).

Q3 : Déterminer les coordonnées du point A″, image du point A′(4 ; 1).

Q4 : Sur le graphique fourni en annexe, placer les points B, A, A′ et A″.

Dans la suite de l'exercice, M(x ; y) est un point appartenant à D. On a donc $x \geqslant y \geqslant 0$.

Q5 : Montrer que l'écart-type des coordonnées de M vaut $\frac{x-y}{2}$.

Q6 : Montrer que le point M′ appartient à D.

Q7 : Pour quelles valeurs de x et y le point M′ est-il confondu avec le point M ?

Q8 : La feuille de calcul suivante a été obtenue avec un tableur. Le point M″ désigne l'image du point M′ par la transformation M/E.

	A	B	C	D	E	F
1	Abscisse de M	Ordonnée de M	Abscisse de M′	Ordonnée de M′	Abscisse de M″	Ordonnée de M″
2	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0.5	0.5	0.5	0
4	1	1	1	0	0.5	0.5
5	2	1	1.5	0.5	1	0.5
6	2	2	2	0	1	1
7	3	0	1.5	1.5	1.5	0
8	3	1	2	1	1.5	0.5
9	3	3	3	0	1.5	1.5
10	4	0	2	2	2	0
11	4	1	2.5	1.5	2	0.5
12	4	2	3	1	2	1
13	4	3	3.5	0.5	2	1.5
14	4	4	4	0	2	2

(a) Quelles formules a-t-on saisies et étirées vers le bas, dans les cellules C2, D2, E2 et F2 ?

(**b**) En comparant les deux premières et les deux dernières colonnes, quelle conjecture peut-on formuler concernant M″ ?

(**c**) Démontrer cette conjecture.

Q9 : On applique successivement 4 049 fois la transformation M/E en partant du point C $\left(2^{2\,025}\,;\,2^{2\,023}\right)$.
Quel est le point final obtenu ?

Q10 : On note Δ la demi-droite constituée des points dont l'abscisse x et l'ordonnée y vérifient :

$$x \geqslant 0 \text{ et } y = \left(\sqrt{2}-1\right)x.$$

La droite Δ a été tracée sur le graphique fourni en annexe.

(**a**) Justifier que Δ est incluse dans D.

(**b**) Montrer que si M appartient à Δ alors M′ appartient à Δ.

(**c**) Soit M$(x\,;\,y)$ un point appartenant au domaine D et M′ son image par la transformation M/E. On note N l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

Montrer que M′ est le symétrique du point N par rapport à Δ.

Annexe

(à rendre par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)