

♣ Baccalauréat C Maroc juin 1971 ♣

EXERCICE 1

Soit la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \text{Log}|x| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue au point 0?
2. Étudier la fonction f ; construire dans un repère orthonormé la courbe d'équation $y = f(x)$.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le mouvement d'un point M dont les coordonnées en fonction du temps t sont

$$\begin{cases} x = f(t) = p \frac{\cos t}{1 - \cos t} \\ y = g(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \end{cases}$$

p étant un nombre positif donné et t variant entre 0 et 2π ($0 < t < 2\pi$).

1. Trajectoire (P) de M .
2. Soit M_1 le point de (P) dont les coordonnées x_1 et y_1 sont données par

$$\begin{cases} x_1 = f(t + \pi), \\ y_1 = g(t + \pi). \end{cases}$$

Donner en fonction de t , les coordonnées de M_1 .

Montrer que M , O et M_1 sont alignés.

3. Quelle est la trajectoire du milieu, I , de MM_1 quand t varie entre 0 et 2π ?

EXERCICE 1

Partie A

Deux nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ ont pour arguments respectifs θ et θ' (mod. 2π).
Établir les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{z}{z'} \text{ réel}\right) \iff \theta' - \theta = 0 \pmod{\pi},$$

$$\left(\frac{z}{z'} \text{ imaginaire pur}\right) \iff \theta' - \theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Partie B

À tout nombre complexe z on associe, lorsque cela est possible, le nombre complexe z' tel que $\frac{z'-1}{z-1}$ soit réel et $\frac{z}{z'}$ imaginaire pur.

On désigne par M et M' les images de z et z' et par A le point $(+1; 0)$.

1. On suppose que M' existe. Démontrer, en utilisant les résultats de la question A, que

$$\left(\frac{z'-1}{z-1} \text{ réel} \right) \iff (AMM' \text{ sont alignés})$$

et

$$\left(\frac{z}{z'} \text{ imaginaire pur} \right) \iff (\text{les droites } OM \text{ et } OM' \text{ sont perpendiculaires}).$$

2. Construire M' lorsque M est donné et déterminer géométriquement l'ensemble (C) des points M pour lesquels M' n'existe pas.

Partie C

On se propose de retrouver analytiquement les résultats de la question B. On pose

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad z' = x' + iy'.$$

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{z'-1}{z-1}$ soit réel.
2. Écrire la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{z}{z'}$ soit imaginaire pur.