

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Maroc juin 1972 ∞

EXERCICE 1

1. Montrer que, pour  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , la fonction  $y \mapsto \sin y$  admet une fonction réciproque, notée  $\varphi$ .

Déterminer le domaine de définition de  $\varphi$ .

2. Démontrer que  $\varphi$  est dérivable pour  $0 < x < 1$  et admet pour dérivée en  $x$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction  $\varphi$  est-elle dérivable pour  $x = 0$  et pour  $x = 1$  ?

3. Préciser le domaine de définition de la fonction  $x \mapsto \varphi(\cos^2 x)$  et calculer sa dérivée lorsqu'elle existe.

EXERCICE 2

Soit  $\mathcal{M}_2$  l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.

Soit les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{M}'$  l'ensemble des combinaisons linéaires  $\alpha I + \beta J$ ,  $(\alpha : \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{M}'$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2$ , dont on déterminera une base.

2. Calculer  $J^n$ .

Si  $A = \alpha I + \beta J$ , calculer  $A^n$ .

3. On considère la suite  $(x_n, y_n)$  de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$(x_0; y_0) = (1; 1) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a. Calculer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ .

b. Démontrer que, pour  $|\alpha| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

PROBLÈME

Soit  $g_a$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$g_a(x) = \sqrt{a+x}, \quad a \text{ étant un paramètre réel.}$$

1. a. Étudier cette fonction.

**b.** On désigne par  $(C_a)$  la courbe d'équation  $y = g_a(x)$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $(C'_a)$  la transformée de  $(C_a)$  dans la symétrie orthogonale d'axe  $(O, \vec{i})$ .

Déterminer la nature géométrique de  $(\Gamma_a) = (C_a) \cup (C'_a)$ . Construire  $(\Gamma_a)$ .

Montrer que  $(\Gamma_{a_1})$  se déduit de  $(\Gamma_{a_2})$  par une translation, que l'on caractérisera.

- 2.** **a.** Déterminer les primitives de  $g_a$ .  
**b.** Déterminer la valeur du paramètre  $a$ , tel que

$$\int_{-a}^3 \sqrt{a+x} \, dx = 18.$$

**c.** Dans le cas où  $a$  prend la valeur calculée précédemment, déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $(C_a)$  et de la droite d'équation  $y = x$ .

- 3.** On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & \sqrt{6+U_n}. \end{cases}$$

- a.** Calculer  $U_1, U_2$  et  $U_3$ .  
**b.** Montrer que cette suite est strictement croissante et majorée par 3.  
**c.** Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$3 - U_{n+1} \leq \frac{3 - U_n}{3}.$$

En déduire que  $3 - U_{n+1} \leq \frac{1}{3^n}$ .

Démontrer que la suite  $U_n$  possède une limite  $\ell$ , que l'on déterminera.