

Durée : 4 heures

♧ Baccalauréat C juin 1975 Maroc ♧

**EXERCICE 1**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \text{Log } x^2$  (Log : logarithme népérien).

Étudier la variation de  $f$ , tracer la courbe représentative  $C$  par rapport à un repère orthonormé.

Ecrire l'équation de la tangente à  $C$  au point d'abscisse  $e$ .

Aire du domaine limité par  $C$ , l'axe des  $x$  et la tangente à  $C$  au point d'abscisse  $e$ , et situé dans la région correspondant aux ordonnées positives.

**EXERCICE 2**

Soit  $P$  le plan affine rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère l'application  $F$  de  $P$  dans  $P$  qui à  $M(x; y)$  associe  $M'(x'; y')$

$$\begin{cases} x' &= -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}y \\ y' &= -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Déterminer la matrice de l'application linéaire associée  $\varphi$ .

Déterminer  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ .

Soit  $M' = F(M)$  et  $M'' = F(M')$ .

Déterminer  $\varphi(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''})$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}$ .

Que peut-on déduire du résultat pour la somme  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$  ?

Quel est l'isobarycentre de  $M, M'$  et  $M''$  ?

**PROBLÈME**

On désignera par  $\mathcal{F}$  l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  et indéfiniment dérivables muni des lois de composition habituelles.

On se propose de trouver l'ensemble  $S$  des fonctions numériques  $f$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$(1) \quad f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4(2x - 1)e^x + x^2 - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On remarquera que  $S$  est inclus dans  $\mathcal{F}$ .

**Partie A**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions numériques  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = (ax + b)e^x + cxe^{-x}$$

où  $a, b, c$  varient dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ .

Pour  $n$  entier positif, montrer que la dérivée d'ordre  $n$  de  $h$  est définie par :

$$h^{(n)}(x) = [a(x+n) + b]e^x + (-1)^n c(x-n)e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Soit  $h_1, h_2, h_3$  les éléments de  $E$  définis par :

$$h_1(x) = xe^x, \quad h_2(x) = e^x, \quad h_3(x) = xe^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $\mathcal{B} = \{h_1, h_2, h_3\}$  est une base de  $E$ .

3. Soit  $\phi$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  définie par :

$$\phi(f) = f'' + 2f' + f$$

et  $\phi_1$  sa restriction à  $E$ .

- a. Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{F}$ .

Calculer  $\phi_1(h)$  pour  $h$  appartenant à  $E$ ; en déduire que  $\phi_1$  est un endomorphisme de  $E$ .

- b. Déterminer le noyau  $N(\phi_1)$  et l'image  $\phi_1(E)$  de cet endomorphisme.

4. Montrer que l'application :  $x \mapsto 4(2x-1)e^x$  appartient à  $\phi_1(h)(E)$  et trouver alors un élément  $h_0$  de  $E$  tel que

$$\phi_1(h_0)(x) = 4(2x-1)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### Partie B

1. Trouver une fonction polynôme  $p_0$  du second degré telle que :

$$\phi(p_0)(x) = p_0''(x) + 2p_0'(x) + p_0(x) = x^2 - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Montrer que  $h_0 + p_0$  est un élément de  $S$ .

### Partie C

On se propose de chercher l'ensemble  $S_0$  noyau de l'application  $\phi$  dans  $\mathcal{F}$

1. Soit  $f$  appartenant à  $S_0$ ; calculer la dérivée seconde de la fonction

$$g : x \mapsto e^x f(x).$$

2. Déterminer la forme générale de la fonction  $g$ . En déduire l'ensemble  $S_0$ .
3. Vérifier que  $f$  appartient à  $S$  si et seulement si  $f - (h_0 + p_0)$  appartient à  $S_0$ .  
En déduire l'ensemble  $S$  des fonctions vérifiant (1).